ORTAÖĞRETİM

TEMEL DÜZEY MATEMATİK

11

Ders Kitabı

YAZARLAR
Baycan AYMAZ
Bilal KIZMAZ
Yusuf VURDEM

DEVLET KİTAPLARI
……………………., 2021

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 7051
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1204

HAZIRLAYANLAR

EDİTÖR
Dr. Öğr. Üyesi Ercan MASAL

DİL UZMANI
Kevser Gülşah AKTÜRK

REHBERLİK VE GELİŞİM UZMANI
Günay ERDEM ÖZKAN

GÖRSEL VE GRAFİK TASARIM UZMANLARI
Kübra BASMAZ

ISBN 978-975-11-4985-5

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 18.04.2019 gün ve 8 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiştir.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

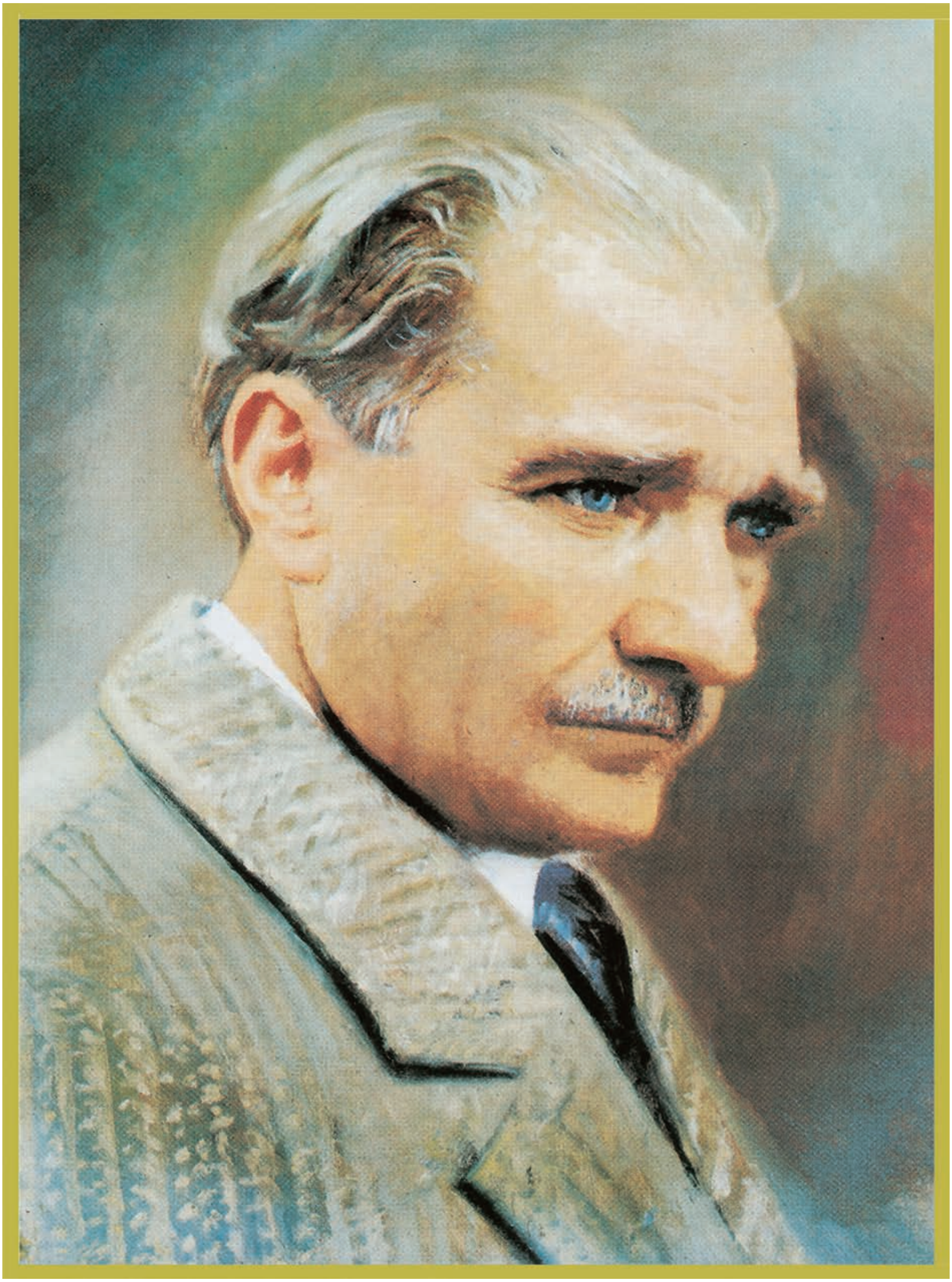
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

Kitabın Tanıtımı....9
Semboller ve Gösterimler....12

1. SAYILAR....13
1.1. Sayı Kümeleri....15
1. 1. 1. Sayı Kümeleri Arasındaki İlişki....16
Alıştırmalar....25
1. 1. 2. Doğal Sayıların Çözümlenmesi ile İlgili Problemler....26
Alıştırmalar....32
1. 1. 3. Eşit Miktarda Artarak Devam Eden Sınırlı Sayıdaki Doğal Sayıların Toplamı....33
Alıştırmalar....40
1.2. Bölünebilme....41
1. 2. 1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları....42
Alıştırmalar....52
1. 2. 2. Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı....53
Alıştırmalar....56
Öz Değerlendirme Formu....57
Ölçme ve Değerlendirme....58

2. ÜÇGENLER....61
2. 1. Dik Üçgen....63
2. 1. 1. Dik Üçgenler ile İlgili Problemler....64
Alıştırmalar....72
2. 1. 2. Dik Üçgende Trigonometrik Oranlarla İlgili Problemler....73
Alıştırmalar....79
2. 1. 3. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler....80
Alıştırmalar....87
Öz Değerlendirme Formu....88
Ölçme ve Değerlendirme....89

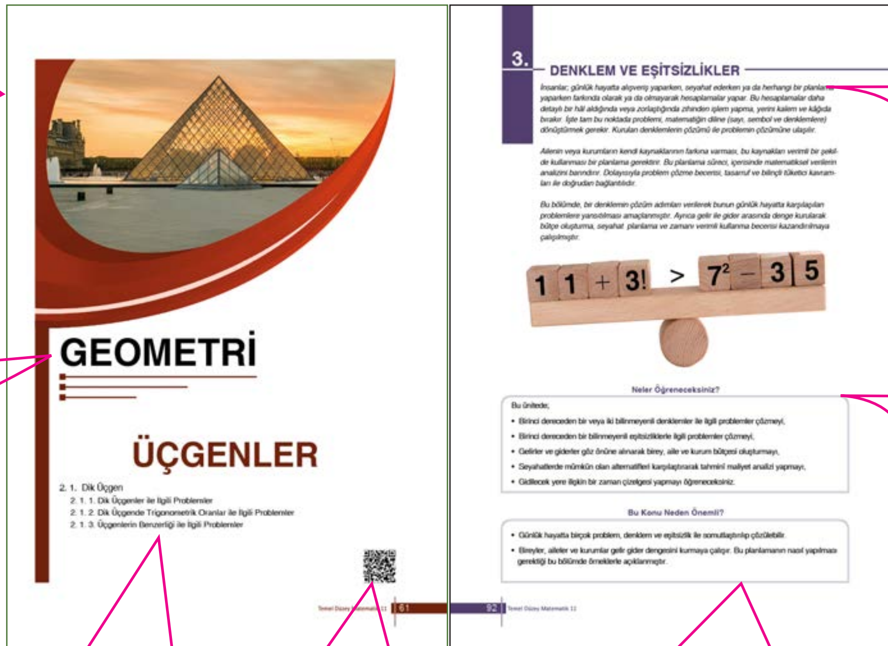
3. DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER....91
3. 1. Birinci Dereceden Denklem ve Eşitsizlikler....93
3. 1. 1. Birinci Dereceden Bir veya İki Bilinmeyenli Denklemler ile İlgili Problemler....94
Alıştırmalar....103
3. 1. 2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ile İlgili Problemler....104
Alıştırmalar....109
3. 2. Bilinçli Tüketici Aritmetiği....110
3. 2. 1. Gelirler ve Giderler Göz Önüne Alınarak Birey, Aile ve Kurum Bütçesi Oluşturma....111
Alıştırmalar....118
3. 2. 2. Seyahatlerde Mümkün Olan Alternatifleri Karşılaştırma....119
Alıştırmalar....122
Öz Değerlendirme Formu....123
Ölçme ve Değerlendirme....124

4. ÇEMBER VE DAİRE....127
4. 1. Çemberin Temel Elemanları....129
4. 1. 1. Çember ve Temel Elemanları....130
Alıştırmalar....134
4. 2. Çemberde Açılar....135
4. 2. 1. Çemberde Açılar ve Özellikleri....136
Alıştırmalar....141
4. 3. Dairenin Çevresi ve Alanı....142
4. 3. 1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları....143
Alıştırmalar....150
Öz Değerlendirme Formu....151
Ölçme ve Değerlendirme....152

SÖZLÜK....155
KAYNAKÇA....158

KİTABIN TANITIMI

Bölüm kapakları



Öğrenme alanının yer aldığı kısımdır.

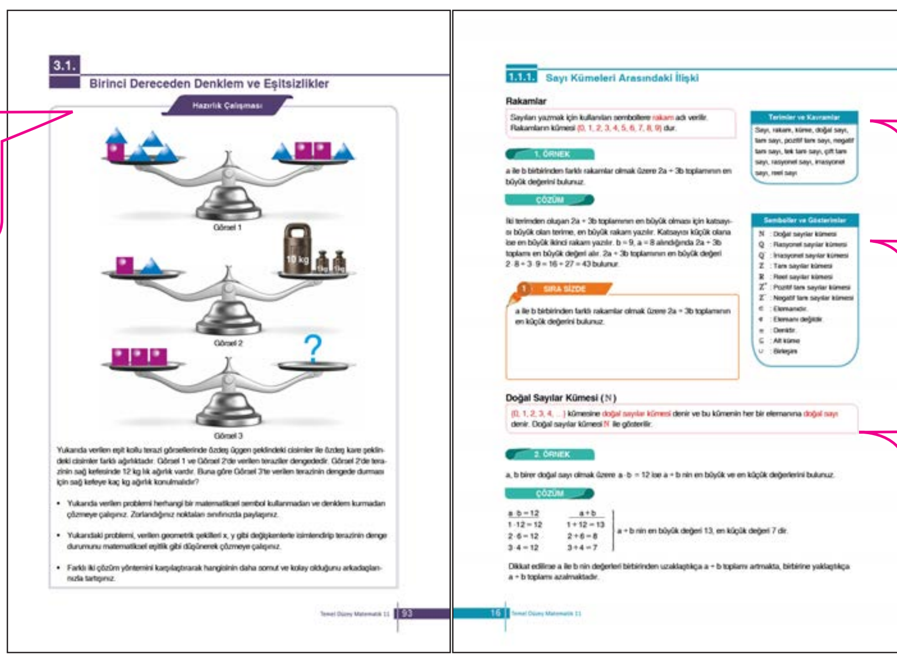
Konu ile ilgili çeşitli ön bilgiler içeren giriş niteliğinde metinlerin yer aldığı kısımdır.

Konunun hedefinin birkaç cümleyle özetlendiği kısımdır.

Bölüm içerisindeki konu başlıklarının yer aldığı kısımdır.

Bölüm karekodunun yer aldığı kısımdır.

Konunun önemine ve diğer konular ile ilişkisine dikkat çekilen kısımdır.



Ön bilgilerin hatırlanmasını sağlayan günlük hayat problemlerinin yer aldığı kısımdır.

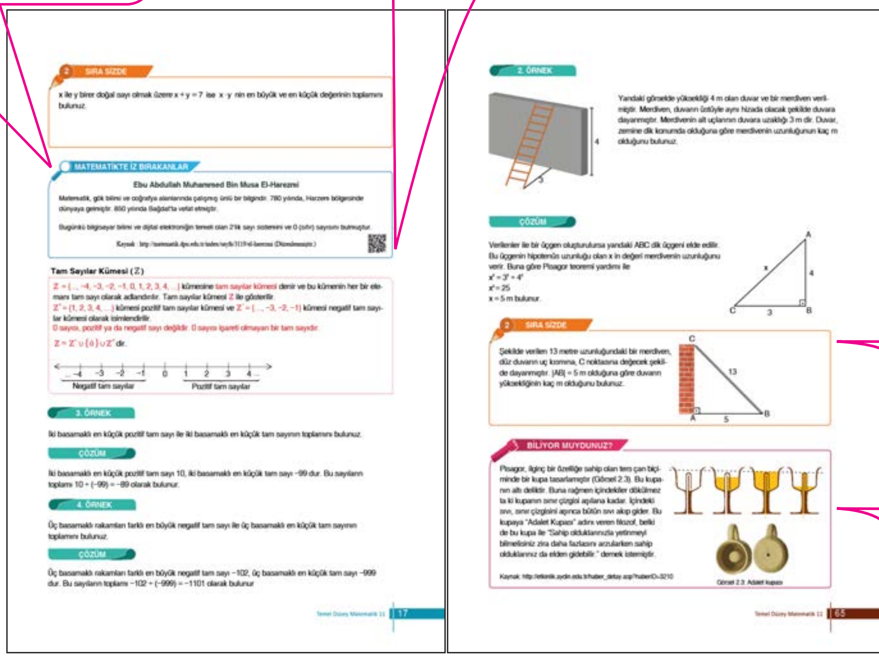
Konu içerisindeki terim ve kavramları içeren kısımdır.

Konu içerisindeki sembollerin anlamlarını içeren kısımdır.

Konu alt başlıklarının ve tanımların yer aldığı kısımdır.

Konu ile ilgili çalışmaları olan bilim insanlarının tanıtıldığı kısımdır.

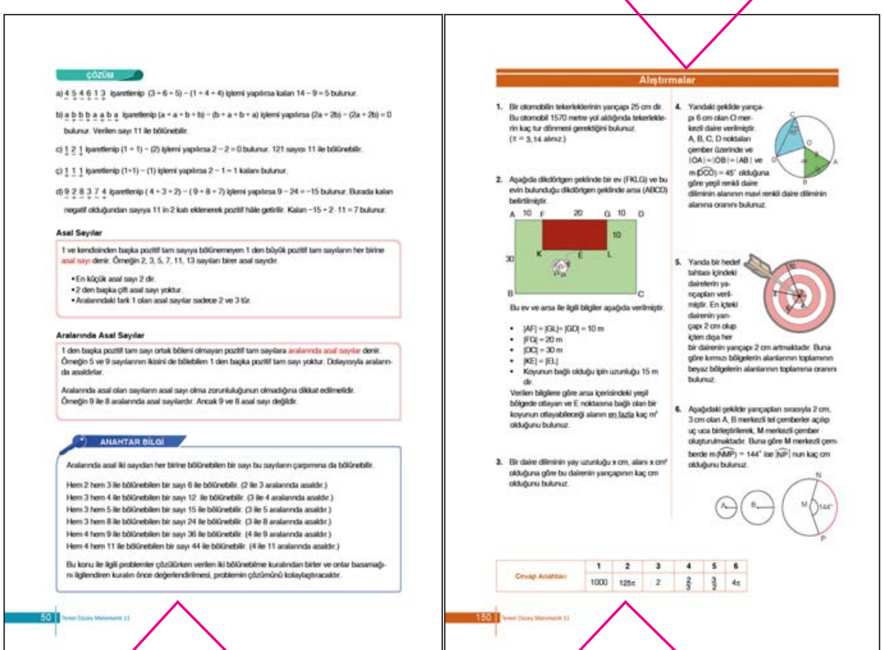
Etkileşimli kitap, video, ses, animasyon, uygulama, oyun, soru vb. ilave kaynaklara ulaşabileceğiniz karekodu gösterir. Daha fazlası için http://ogmmateryal.eba.gov.tr adresini ziyaret edebilirsiniz.



Öğrendiklerinizden faydalanarak çözebileceğiniz problemlerin yer aldığı kısımdır.

Konu ile ilgili ilginç bilgilerin yer aldığı kısımdır.

Öğrenilen bilgilerin pekiştirilmesini amaçlayan soruların yer aldığı kısımdır.

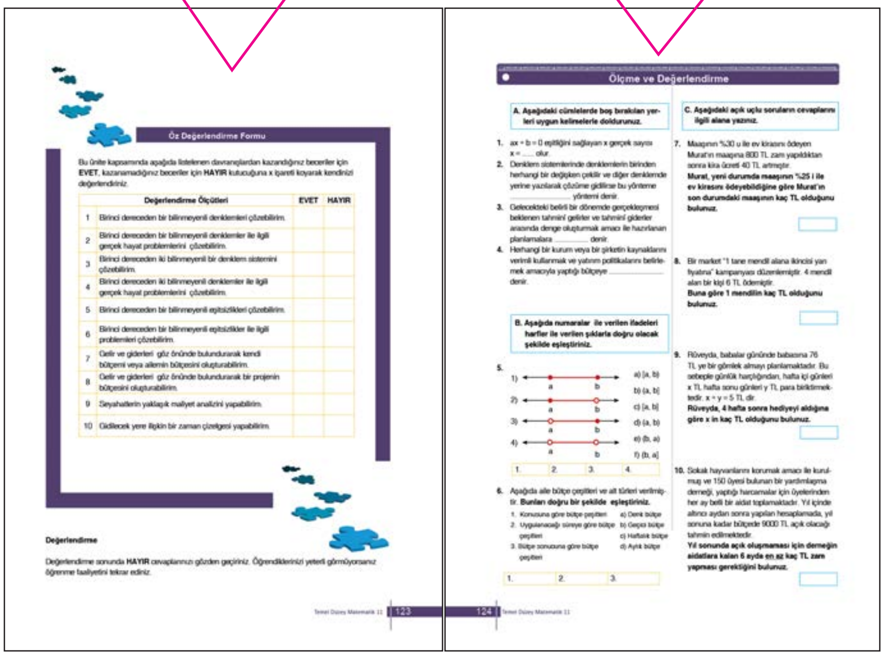


Konunun anlaşılmasını destekleyen bilgilerin yer aldığı kısımlardır.

Alıştırma sorularının cevap anahtarını içeren kısımdır.

Kazanılması hedeflenen davranışlara yönelik kendinizi değerlendirebileceğiniz kısımdır.

Çeşitli problem tiplerine yer verilerek öğrenme faaliyetlerinin değerlendirildiği kısımdır.



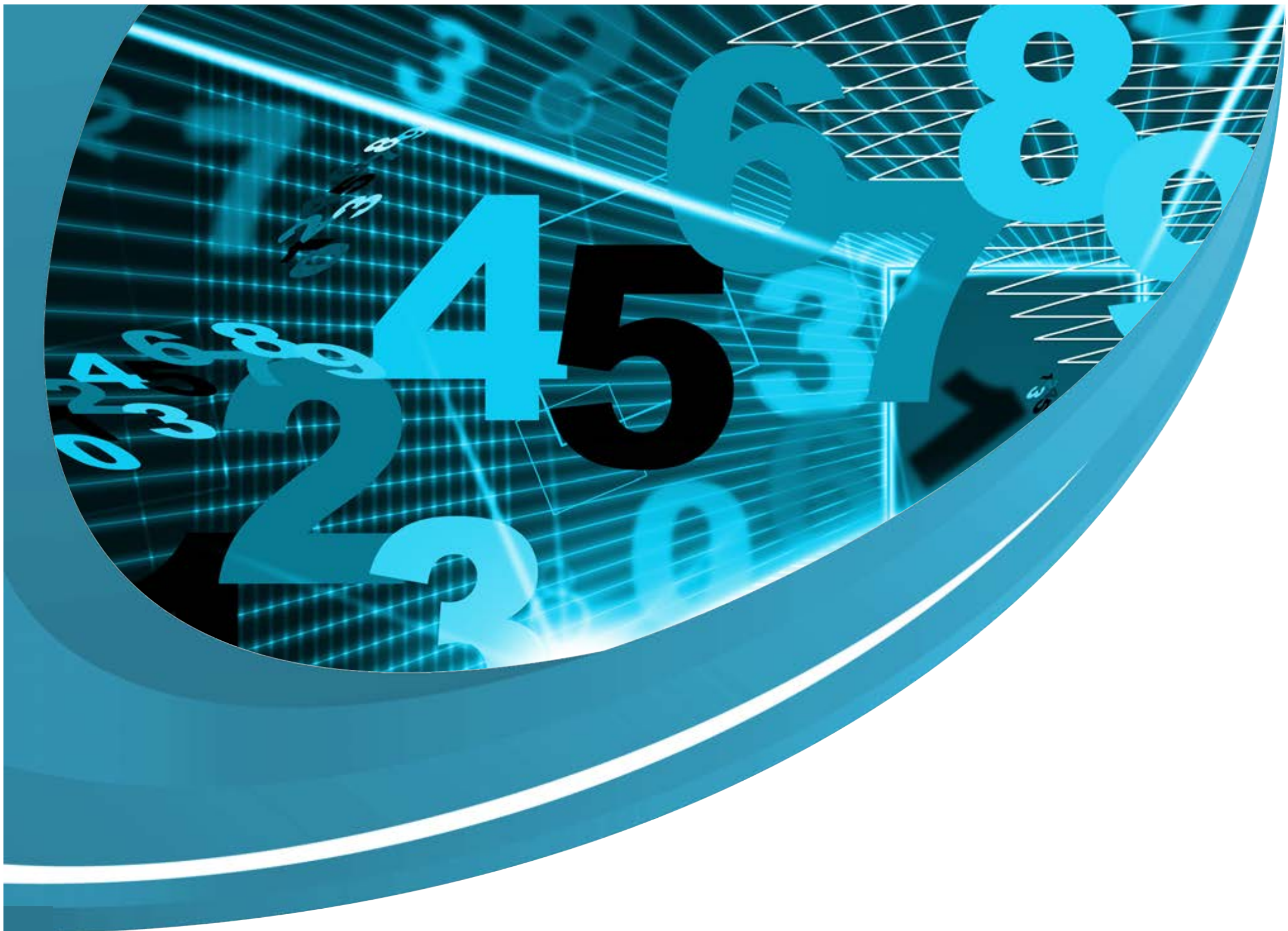
Kitapta kullanılan semboller ve gösterimlerin yer aldığı kısımdır.



SEMBOLLER VE GÖSTERİMLER

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel (gerçek) sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi
$\in$	Eleman
$\notin$	Elemanı değil
$\equiv$	Denk
$=$	Eşit
$\approx$	Yaklaşık
$>$	Büyük
$<$	Küçük
$\leq$	Küçük veya eşit
$\geq$	Büyük veya eşit
$B \mid A$	A sayısı B sayısına tam bölünür
$\perp$	Dik
$\subseteq$	Alt küme
$\cup$	Birleşim

$[AB]$	AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
$\widehat{C}$	C açısı
$m(\widehat{C})$	C açısının ölçüsü
$\sin x$	x açısının sinüsü
$\cos x$	x açısının kosinüsü
$\tan x$	x açısının tanjantı
$\cot x$	x açısının kotanjantı
$\sim$	Benzer
$\widehat{ABC}$	ABC üçgeni
$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$	ABC üçgeni ile DEF üçgeni benzerdir
$[a, b]$	ab kapalı aralık
(a, b)	ab açık aralık
$[a, b)$	ab yarı açık aralık
$(a, b]$	ab yarı açık aralık
r	Yarıçap
R	Çap
$\overset{\frown}{AB}$	AB yayı
$m(\overset{\frown}{AB})$	AB yayının ölçüsü
$\lvert \overset{\frown}{AB} \rvert$	AB yayının uzunluğu



SAYILAR VE CEBİR

SAYILAR

1. 1. Sayı Kümeleri
   - 1. 1. 1. Sayı Kümeleri Arasındaki İlişki
   - 1. 1. 2. Doğal Sayıların Çözümlenmesi ile İlgili Problemler
   - 1. 1. 3. Eşit Miktarda Artarak Devam Eden Sınırlı Sayıdaki Doğal Sayıların Toplamı

1. 2. Bölünebilme
   - 1. 2. 1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları
   - 1. 2. 2. Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı

1. SAYILAR

Matematiğin en temel kavramları sayı ve şekildir. Bu iki kavram, matematiksel bilgilerin yapı taşı niteliğindedir.

Sayılar, nesnelerin çokluğunu belirlemek amacı ile kullanılmaya başlanılsa da günümüzde sayı kümeleri, matematiksel problemlerin çözümünün sınırlarını belirleyen önemli bir kavram hâline gelmiştir.

Bu bölümde sayı ve sayı kümeleri, temel bir yaklaşım ile ele alınacaktır.



Neler Öğreneceksiniz?

Bu ünitede;

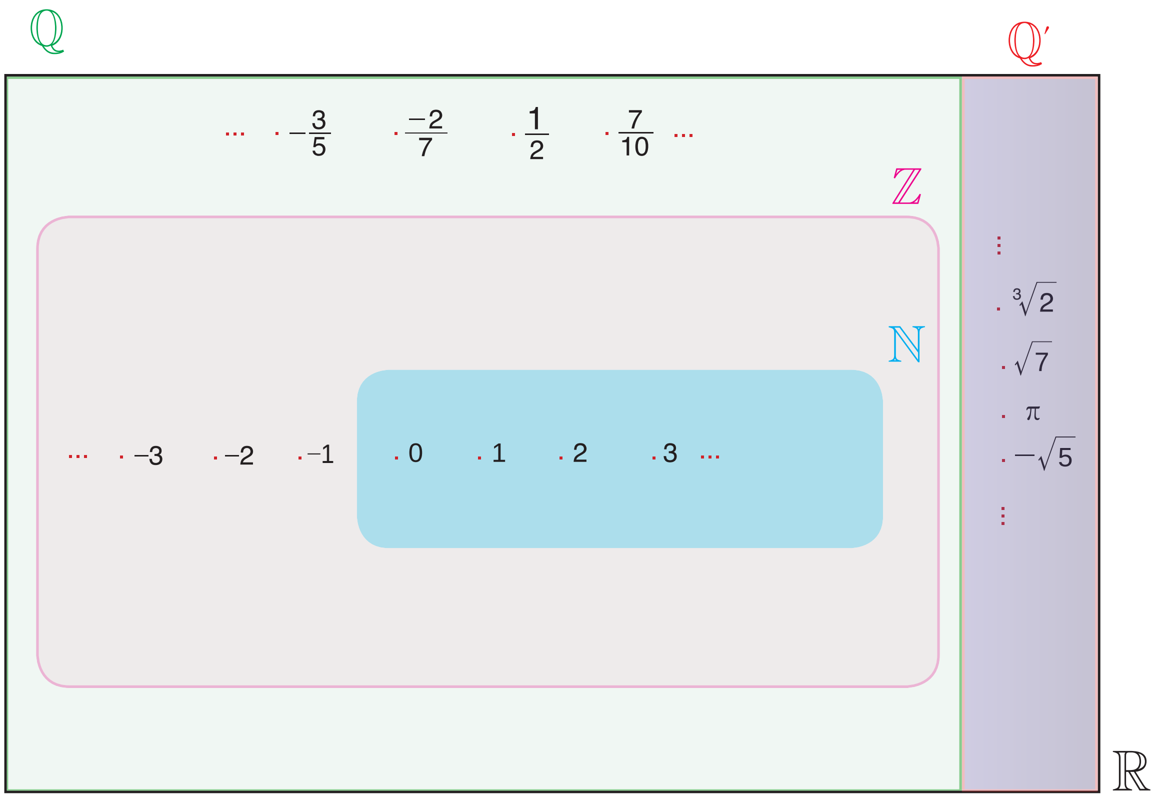
- Sayı kümelerini (rakamlar, doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar) ve bu kümeler arasındaki ilişkiyi,
- Doğal sayıların çözümlenmesi ile ilgili problemler çözmeyi,
- Sonlu sayıda ardışık doğal sayıların toplamlarını bulmayı,
- Tam sayılar kümesinde bölünebilme kuralları ile ilgili işlemler yapmayı,
- Asal sayıları ve bir sayının asal sayı çarpanlarını bulmayı,
- Bir tam sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulmayı öğreneceksiniz.

Bu Konu Neden Önemli?

- Sayılar konusu, matematiğin temel konularından olan sayıları ve sayı kümelerinin özelliklerini içerir.
- Günlük yaşamda ve iş yaşamında aktif olarak yararlanılabilecek bilgiler barındırır.
- Matematiği iyi bir analiz aracı olarak kullanabilme yeteneğine katkı sağlar.
- Problem çözme becerisini geliştirecek konulara temel olma niteliğindedir.

1.1. Sayı Kümeleri

Hazırlık Çalışması



- Öğrencilerin bir okul numarasına, taşıtların bir plakaya, diplomaların bir numaraya, elektronik cihazların seri numarasına sahip olması vb. ne gibi kolaylıklar sağlar? Bu konuyu sınıfınızda tartışıp benzer örnekler vererek değerlendiriniz.

- Sayılar hiç olmasaydı günlük hayatta ne gibi zorluklar yaşanabilirdi? Örnekler vererek tartışınız.

- Biyoloji dersinde canlıları bazı özelliklerine göre incelemek veya fizik dersinde maddeleri katı, sıvı, gaz ve plazma vb. olarak sınıflandırmak konuların işlenişinde ve anlaşılmasında kolaylıklar sağlar. Buradan yola çıkarak matematikte de sayıları kümeler hâlinde incelemek aynı kolaylıkları sağlar mı? Sınıfınızda tartışınız.

1.1.1. Sayı Kümeleri Arasındaki İlişki

Rakamlar

Sayıları yazmak için kullanılan sembollere rakam adı verilir.
Rakamların kümesi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} dur.

Terimler ve Kavramlar

Sayı, rakam, küme, doğal sayı, tam sayı, pozitif tam sayı, negatif tam sayı, tek tam sayı, çift tam sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı, reel sayı

1. ÖRNEK

a ile b birbirinden farklı rakamlar olmak üzere 2a + 3b toplamının en büyük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki terimden oluşan 2a + 3b toplamının en büyük olması için katsayısı büyük olan terime, en büyük rakam yazılır. Katsayısı küçük olana ise en büyük ikinci rakam yazılır. b = 9, a = 8 alındığında 2a + 3b toplamı en büyük değeri alır. 2a + 3b toplamının en büyük değeri $2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 16 + 27 = 43$ bulunur.

Semboller ve Gösterimler

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}'$: İrrasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^-$: Negatif tam sayılar kümesi
$\in$: Eleman
$\notin$: Eleman değil
$\equiv$: Denk
$\subseteq$: Alt küme
$\cup$: Birleşim

1 SIRA SİZDE

a ile b birbirinden farklı rakamlar olmak üzere 2a + 3b toplamının en küçük değerini bulunuz.

Doğal Sayılar Kümesi ($\mathbb{N}$)

{0, 1, 2, 3, 4, ...} kümesine doğal sayılar kümesi denir ve bu kümenin her bir elemanına doğal sayı denir. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir.

2. ÖRNEK

a, b birer doğal sayı olmak üzere $a \cdot b = 12$ ise a + b nin en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a \cdot b = 12$	$a + b$
$1 \cdot 12 = 12$	$1 + 12 = 13$
$2 \cdot 6 = 12$	$2 + 6 = 8$
$3 \cdot 4 = 12$	$3 + 4 = 7$

a + b nin en büyük değeri 13, en küçük değeri 7 dir.

Dikkat edilirse a ile b nin değerleri birbirinden uzaklaştıkça a + b toplamı artmakta, birbirine yaklaştıkça a + b toplamı azalmaktadır.

2 SIRA SİZDE

x ile y birer doğal sayı olmak üzere $x + y = 7$ ise $x \cdot y$ nin en büyük ve en küçük değerinin toplamını bulunuz.

MATEMATİKTE İZ BIRAKANLAR

Ebu Abdullah Muhammed Bin Musa El-Harezmi

Matematik, gök bilimi ve coğrafya alanlarında çalışmış ünlü bir bilgindir. 780 yılında, Harzem bölgesinde dünyaya gelmiştir. 850 yılında Bağdat'ta vefat etmiştir.

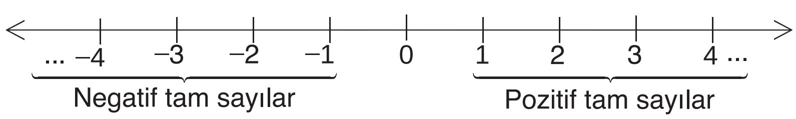
Bugünkü bilgisayar bilimi ve dijital elektroniğin temeli olan 2'lik sayı sistemini ve 0 (sıfır) sayısını bulmuştur.

Kaynak : http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3119/el-harezmi (Düzenlenmiştir.)

Tam Sayılar Kümesi ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kümesine tam sayılar kümesi denir ve bu kümenin her bir elemanı tam sayı olarak adlandırılır. Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kümesi pozitif tam sayılar kümesi ve $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ kümesi negatif tam sayılar kümesi olarak isimlendirilir.
0 sayısı, pozitif ya da negatif sayı değildir. 0 sayısı işareti olmayan bir tam sayıdır.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ dir.



3. ÖRNEK

İki basamaklı en küçük pozitif tam sayı ile iki basamaklı en küçük tam sayının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

İki basamaklı en küçük pozitif tam sayı 10, iki basamaklı en küçük tam sayı −99 dur. Bu sayıların toplamı $10 + (-99) = -89$ olarak bulunur.

4. ÖRNEK

Üç basamaklı rakamları farklı en büyük negatif tam sayı ile üç basamaklı en küçük tam sayının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç basamaklı rakamları farklı en büyük negatif tam sayı −102, üç basamaklı en küçük tam sayı −999 dur. Bu sayıların toplamı $-102 + (-999) = -1101$ olarak bulunur

3 SIRA SİZDE

Aşağıdaki ifadeleri doğru (D) veya yanlış (Y) olarak belirleyiniz.

a) (...) İki tam sayının toplamı daima tam sayıdır.
b) (...) Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır.
c) (...) Her tam sayı aynı zamanda bir doğal sayıdır.
ç) (...) İki tam sayının toplamı daima bir doğal sayıdır.
d) (...) İki tam sayının toplamı sıfır olabilir.

5. ÖRNEK

x ve y birer pozitif tam sayı olmak üzere $3x + 4y = 48$ eşitliğini sağlayan y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x + 4y = 48$ ise

$3x = 48 - 4y$

$x = \dfrac{48 - 4y}{3}$

$x = 16 - \dfrac{4y}{3}$ olur.

Burada x pozitif tam sayı olduğundan,

$16 - \dfrac{4y}{3} > 0$

$16 > \dfrac{4y}{3}$

$48 > 4y$

$12 > y$ olur.

y sayısı 12 den küçük ve 3 ün katı olmalıdır. Bu durumda y sayısının alabileceği değerler 3, 6, 9 dir.

4 SIRA SİZDE

x tam sayı olmak üzere $\dfrac{3x + 6}{x}$ ifadesini tam sayı yapan kaç farklı x değeri olduğunu bulunuz.

Tek ve Çift Tam Sayılar

2 ile kalansız bölünen tam sayıların her birine çift tam sayı denir.
Çift tam sayılar $k \in \mathbb{Z}$ için 2k ile gösterilir.
Çift tam sayıların kümesi {..., −6, −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...} şeklindedir.
2 ile kalansız bölünmeyen tam sayıların her birine tek tam sayı denir.
Tek tam sayılar $k \in \mathbb{Z}$ için $2k + 1$ veya $2k - 1$ ile gösterilir.
Tek tam sayıların kümesi {..., −5, −3, −1, 1, 3, 5, ...} şeklindedir.

Bu bölümde herhangi bir tek tam sayı T ile, herhangi bir çift tam sayı Ç ile gösterilecektir.

Ç çift tam sayı ve T tek tam sayı olmak üzere bunlarla ilgili işlemler aşağıdaki gibidir.

$Ç \pm Ç = Ç$ $\quad Ç \cdot Ç = Ç$ $\quad T^n = T \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$

$T \pm T = Ç$ $\quad T \cdot T = T$ $\quad Ç^n = Ç \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$

$T \pm Ç = T$ $\quad T \cdot Ç = Ç$

ANAHTAR BİLGİ

Bir sayının sıfırdan farklı pozitif tam sayı kuvvetini (üssünü) alma işlemi, sayının tek tam sayı veya çift tam sayı olmasını değiştirmez.
$T^0 = 1$ ve $Ç^0 = 1$ $(Ç \neq 0)$ olduğuna dikkat ediniz.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin tek tam sayı ya da çift tam sayı olma durumlarını belirtiniz.

a) $12^{15} + 7^{22} - 4^0$ b) $6 + \frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$

ÇÖZÜM

a) 12 sayısı çift tam sayı olduğundan 12^{15} sayısı da çift tam sayıdır.
7 sayısı tek sayı olduğundan 7^{22} sayısı da tek tam sayıdır.
$4^0 = 1$ olduğundan 4^0 sayısı tek tam sayıdır. Dolayısıyla $12^{15} + 7^{22} - 4^0$ işleminin sonucu
$Ç + T - T = Ç$ şeklinde bir çift tam sayı olduğu görülür.

b) $6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $6 + \frac{1}{2}$ toplamı tek tam sayı veya çift tam sayı olarak adlandırılamaz.

c) $\sqrt{2}$ sayısı tam sayı olmadığından tek tam sayı veya çift tam sayı olarak adlandırılamaz.

5 SIRA SİZDE

a ve b çift tam sayılar olmak üzere aşağıdaki ifadelerden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

a) $\frac{a+2}{4}$ işleminin sonucu çift tam sayıdır.

b) a^b işleminin sonucu çift tam sayıdır.

c) $(a + 1) \cdot (b + 1)$ işleminin sonucu tek tam sayıdır.

ç) $\frac{a \cdot b}{a+1}$ işleminin sonucu bir tam sayı ise çift tam sayıdır.

d) $a + b + 1$ işleminin sonucu çift tam sayıdır.

7. ÖRNEK

Bir okulun öğrencileri aşağıdaki koşullara göre bir hafta boyunca bir huzurevi ziyareti gerçekleştirmiştir.

- Ali adlı öğrenci dışında her öğrenci sadece bir kez ziyarete gitmiştir.
- Ali adlı öğrenci hasta olduğundan ziyarete katılamamıştır.
- Hafta sonu her gün çift sayıda öğrenci ziyarete gitmiştir.
- Hafta içi her gün tek sayıda öğrenci ziyarete gitmiştir.

Buna göre okul mevcudunun tek sayı mı, çift sayı mı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

2 gün çift sayıda, 5 gün tek sayıda öğrenci ziyarete gitmiştir. Sadece Ali adlı öğrenci ziyarete katılamamıştır. Buna göre öğrenci sayısı $Ç + T + T = Ç$ olduğundan çift sayıdır.

6 SIRA SİZDE

Bir fabrika, haftanın üç günü tek sayıda; dört günü ise çift sayıda ürün elde etmiştir. Bu şekilde 4 hafta boyunca üretim yapan fabrikanın, 4. haftanın sonunda elde ettiği ürün sayısının tek tam sayı mı çift tam sayı mı olduğunu bulunuz.

8. ÖRNEK

a, b, c doğal sayılar ve $\frac{a+2b}{4} = c$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) b tek tam sayıdır.
B) c çift tam sayıdır.
C) a tek tam sayıdır.
D) b çift tam sayıdır.
E) a çift tam sayıdır.

ÇÖZÜM

$\frac{a+2b}{4} = c$ eşitliğinin her iki tarafı 4 ile çarpılırsa $a + 2b = 4c$ elde edilir. Buradan $a = 4c - 2b$ bulunur. 4c ve 2b çift tam sayıdır. $Ç - Ç = Ç$ olduğundan a kesinlikle çifttir. b ve c sayılarının tek tam sayı ya da çift tam sayı olduğu kesin olarak belirlenemez. Cevap E seçeneğidir.

7 SIRA SİZDE

a, b, c doğal sayılar $\frac{2a+b}{c} = 8$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) a tek tam sayıdır.
B) c çift tam sayıdır.
C) b tek tam sayıdır.
D) b çift tam sayıdır.
E) a çift tam sayıdır.

Rasyonel Sayılar Kümesi $(\mathbb{Q})$

$a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde iki tam sayının birbirine bölümünden oluşan sayılara rasyonel sayılar denir.

Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid\ a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\ \text{ve}\ \text{EBOB}(a,b) = 1\right\}$ dir.

$\frac{a}{b}$ ifadesinde her $a \in \mathbb{Z}$ için $b = 1$ alınırsa $\frac{a}{1} = a \in \mathbb{Q}$ olduğundan her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır. Bu durumda $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ olur.

$\mathbb{Q}^+$, pozitif rasyonel sayılar kümesini; $\mathbb{Q}^-$, negatif rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ şeklindedir.

ANAHTAR BİLGİ

Herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı vardır.

9. ÖRNEK

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin rasyonel sayı olduğunu bulunuz.

a) 0 b) –3 c) $\frac{2}{3}$ ç) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt{16}$

ÇÖZÜM

$\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılar birer rasyonel sayıdır. $(a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0)$ Dolayısıyla

a) $0 = \frac{0}{b}$ şeklinde yazılabildiğinden 0 rasyonel sayıdır.

b) Her tam sayı bir rasyonel sayı olduğundan –3 rasyonel sayıdır.

c) Rasyonel sayı tanımına uygun olduğundan $\frac{2}{3}$ rasyonel sayıdır.

ç) $\sqrt[3]{8} = 2$ ve $2 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\sqrt[3]{8}$ sayısı rasyonel sayıdır.

d) $\sqrt{16} = 4$ ve $4 \in \mathbb{Z}$ olduğundan rasyonel sayıdır.

8 SIRA SİZDE

Aşağıdaki ifadelerden hangilerinin rasyonel sayı olduğunu bulunuz.

a) 1 b) $\frac{-2}{-3}$ c) $\frac{7}{0}$ ç) $\frac{0}{7}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Rasyonel Sayıların Ondalık Açılımı

Bir rasyonel sayının payının, paydasına bölünmesiyle o sayının ondalık açılımı elde edilir.

Örneğin $\frac{3}{5}$, $\frac{21}{2}$, $\frac{312}{100}$ rasyonel sayılarının ondalık açılımı aşağıdaki gibidir.

$\frac{3}{5} = 0,6$, $\frac{21}{2} = 10,5$, $\frac{312}{100} = 3,12$

Bir rasyonel sayının ondalık açılımındaki ondalıklı kısmında, sürekli tekrar eden bir sayı dizisi var ise bu tür sayılara devirli ondalık sayılar denir.

Virgülden sonra tekrar eden ilk sayı dizisinin (devreden kısım) üstüne çizgi çizilerek gösterilir.

Örneğin $\frac{17}{3}$ rasyonel sayısı için bölme işlemi yapılırsa

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline -15 & 5,66\ldots \\ \hline 20 & \\ -18 & \\ \hline 20 & \\ -18 & \\ \hline 2\ldots & \end{array}$$

elde edilir. Buna göre $\frac{17}{3} = 5,666\ldots = 5,\overline{6}$ şeklinde gösterilir.

Sonuç olarak her devirli ondalık sayı bir rasyonel sayıdır.

İrrasyonel Sayılar Kümesi($\mathbb{Q}'$)

$a,\ b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayılar denir.

İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir.

Örneğin $\sqrt{3}$ sayısı $\sqrt{3} = 1,732050807568877292527446635059\ldots$ dir. Ondalık kısmında sürekli tekrar eden bir sayı dizisi olmadığından $\sqrt{3}$ sayısı devirli ondalıklı sayı değildir. Dolayısıyla $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamaz. Bu nedenle $\sqrt{3}$ irrasyonel bir sayıdır. Benzer şekilde $\sqrt{7}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-5}$, π sayıları birer irrasyonel sayıdır.

BİLİYOR MUYDUNUZ?

Bir dairenin çevresinin çapına oranı, daima sabit bir sayıdır. Bu sayı π (pi) sembolü ile gösterilir. Archimedes (Arşimet) sabiti veya Ludolph (Ludolf) sayısı olarak da bilinir. Babillilerden (MÖ 2000) bu yana birçok matematikçi, bu sayıyı rasyonel sayı şeklinde yazmaya çalışmış ve bunun için birçok farklı yaklaşık değer kullanmıştır. Son olarak 1761 yılında Lambert (Lambırt), π sayısının bir rasyonel sayı olmadığını ispatlayarak bu tartışmalara nokta koymuştur.

- π sayısı, alan ve hacim hesaplanırken kullanılır.
- $\pi = 3,14159265358979323846\ldots$
- 14 Mart "Dünya π Günü" olarak kutlanmaktadır.

Kaynak: https://services.tubitak.gov.tr/edergi/user/yaziForm1.pdf?cilt=10&sayi=561&sayfa=10&yaziid=23264
(Düzenlenmiştir.)

10. ÖRNEK

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin irrasyonel sayı olduğunu bulunuz.

a) 12, 6666 ... b) 3,2 c) $\frac{7}{3}$ ç) $\sqrt{25}$ d) $\sqrt{21}$

ÇÖZÜM

a, b $\in \mathbb{Z}$, b $\neq$ 0 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılar birer irrasyonel sayıdır.

a) 12, 6666 ... sayısı devirli ondalıklı sayıdır. Dolayısıyla rasyonel bir sayıdır.

b) 3, 2 ondalıklı sayı olduğundan bir rasyonel sayıdır.

c) Rasyonel sayı tanımına uygundur, $\frac{7}{3}$ rasyonel sayıdır.

ç) $\sqrt{25} = 5$ olduğundan $\sqrt{25}$ sayısı rasyonel sayıdır.

d) $\sqrt{21}$ = 4, 582575694955840006588 ... dir. Dolayısıyla $\sqrt{21}$ devirli bir sayı olmadığından irrasyonel sayıdır.

9 SIRA SİZDE

Aşağıdaki ifadeleri doğru (D) veya yanlış (Y) olarak belirleyiniz.

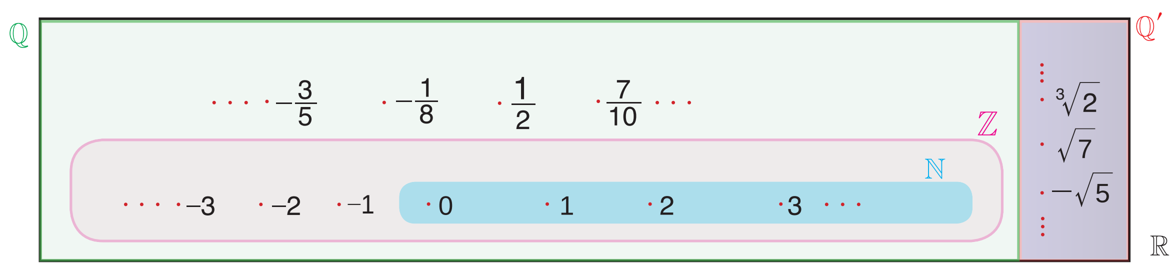
a) (...) Her doğal sayı bir rasyonel sayıdır.
b) (...) Her rasyonel sayı bir doğal sayıdır.
c) (...) Bazı rasyonel sayılar tam sayıdır.
ç) (...) Herhangi iki rasyonel sayının çarpımı daima tam sayıdır.
d) (...) Sayı doğrusunda alınan herhangi iki rasyonel sayı arasına daima bir doğal sayı yazılabilir.

Gerçek (Reel) Sayılar Kümesi ($\mathbb{R}$)

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşim kümesine gerçek sayılar kümesi denir. Gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ dir.

Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar, sayı doğrusunun tamamını hiç boşluk kalmayacak şekilde doldurur. Sayı doğrusundaki her nokta, bir gerçek sayıya karşılık gelir.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ dir.



11. ÖRNEK

Aşağıdakilerden hangilerinin gerçek (reel) sayı belirtmediğini bulunuz.

a) $\sqrt[4]{-7}$ b) $\dfrac{377}{0}$ c) $\sqrt[5]{-6}$ ç) $\dfrac{0}{7}$ d) $2,\overline{3}$

ÇÖZÜM

a) Gerçek sayılarda negatif sayıların çift dereceli kökleri tanımlı değildir. Dolayısıyla $\sqrt[4]{-7}$ ifadesi gerçek sayı değildir.

b) Sıfırdan farklı bir sayının sıfıra bölümü tanımsız kabul edilir. Dolayısıyla $\dfrac{377}{0}$ ifadesi gerçek sayı değildir.

c) Negatif sayıların tek dereceli kökleri tanımlıdır. $\sqrt[5]{-6}$ sayısı bir gerçek sayıdır.

ç) $\dfrac{0}{7} = 0$ olduğundan $\dfrac{0}{7}$ sayısı bir gerçek sayıdır.

d) Her devirli ondalık sayı bir rasyonel sayı olduğundan $2,\overline{3}$ sayısı gerçek sayıdır.

12. ÖRNEK

$7,\ 0, -3,\ \sqrt{5},\ \pi,\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{7}{5}$ ve $-\sqrt{2}$ sayılarının ait olduğu kümeleri bir tablo yardımıyla gösteriniz.

ÇÖZÜM

Aşağıda verilen tabloda her bir sayının ait olduğu küme (✓) işareti ile belirtilmiştir.

	Doğal Sayılar Kümesi	**Tam Sayılar Kümesi**	**Rasyonel Sayılar Kümesi**	**İrrasyonel Sayılar Kümesi**	**Gerçek Sayılar Kümesi**
7	✓	✓	✓		✓
0	✓	✓	✓		✓
–3		✓	✓		✓
$\sqrt{5}$				✓	✓
π				✓	✓
$\dfrac{2}{3}$			✓		✓
$-\dfrac{7}{5}$			✓		✓
$-\sqrt{2}$				✓	✓

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	12	a) D, b) D, c) Y, ç) Y, d) D	8	c, ç	Çift	D	a, b, ç	a) D, b) Y, c) D, ç) Y, d) Y

Alıştırmalar

1. x ve y birer rakam olmak üzere $5x - 3y$ ifadesinin en büyük değerini bulunuz.

2. İki basamaklı en büyük negatif tam sayı ile iki basamaklı en küçük pozitif tam sayının çarpımını bulunuz.

3. Bir tekstil firmasında 1 usta, günde 5 bayrak; 1 çırak, günde 4 bayrak üretebilmektedir. Firma günde 133 bayrak üretebildiğine göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) Çırakların sayısı çift sayıdır.
B) Ustaların sayısı tek sayıdır.
C) Usta ve çırakların sayısı tek sayıdır.
D) Usta ve çırakların sayısı çift sayıdır.
E) Ustalar daha fazla bayrak üretmiştir.

4. Bir GSM operatörü "Ara kazan, aran kazan" kampanyası düzenlemiş ve kampanyanın ayrıntılarını aşağıdaki şekilde paylaşmıştır.

- Bütün kullanım hakları 1 aylıktır.
- Tarifedeki dakikalardan kullanılanın yarısı kadar "Ara kazan" dakikası kazanılır.
- Tüm operatörlerden gelen toplam aramaların 2 katı kadar "Aran kazan" dakikası kazanılır.
- Kampanya kapsamında kazanılan dakikalardan tekrar dakika kazanılamaz.

Tarifesindeki 100 dakika ile bu kampanyaya katılan Hamza, aynı ay içerisinde toplam 80 dakika aranmıştır.
Buna göre Hamza'nın, 1 aylık kampanya dönemi içerisinde toplam en fazla kaç dakika arama yapabileceğini bulunuz.

5. Sağdan sola ve soldan sağa okunuşları aynı olan pozitif tam sayılara "palindromik" sayılar denir. Örneğin 181 sayısı bir palindromik sayıdır. Buna göre üç basamaklı en küçük palindromik sayı ile iki basamaklı en büyük palindromik sayının toplamını bulunuz.

6. Aşağıdakilerden hangisi gerçek (reel) sayı belirtmez?

A) $\sqrt{7}$
B) $\frac{127}{0}$
C) $\sqrt[5]{-6}$
D) $\frac{0}{15}$
E) 5

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	45	−100	B	310	200	B

1.1.2. Doğal Sayıların Çözümlenmesi ile İlgili Problemler

Basamak Kavramı

Bir sayıyı oluşturan rakamlardan her birinin o sayı içerisindeki konumuna basamak denir. Sayıyı oluşturan rakamların adedi, o sayının basamak sayısını verir.

Örneğin 6, bir rakamdan oluşan bir basamaklı; 567, üç rakamdan oluşan üç basamaklı bir sayıdır.

Terimler ve Kavramlar

Basamak, basamak değeri

Semboller ve Gösterimler

= : Eşit
> : Büyük
< : Küçük

Basamak Değeri

Bir sayıda bulunan rakamların, sayıda bulunduğu basamağa göre aldığı değere bu rakamların basamak değeri denir.

Verilen bir sayıda sağdan k. sıradaki bir rakamın 10^{k-1} katı bu rakamın basamak değerini verir.

Bir sayının rakamlarının basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasıyla o sayının çözümlenmiş biçimi elde edilir. Örneğin üç basamaklı abc sayısının çözümlenmiş biçimi

$abc = a \cdot 10^{3-1} + b \cdot 10^{2-1} + c \cdot 10^{1-1}$

$abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \cdot 10^0$ şeklindedir.

10^0 lar (birler) basamağı
10^1 ler (onlar) basamağı
10^2 ler (yüzler) basamağı

1. ÖRNEK

4576 sayısının çözümlenmiş biçimini yazınız.

ÇÖZÜM

$4576 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ olduğu göz önüne alınırsa 4576 sayısının çözümlenmiş biçimi $4576 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$ şeklindedir.

1 SIRA SİZDE

Çözümlenmiş biçimi $8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ şeklinde olan sayıyı bulunuz.

2. ÖRNEK

ab ile ba iki basamaklı sayılardır. ab sayısının rakamlarının yerleri değiştirildiğinde sayının değeri 36 küçülmektedir. Bu koşula uyan kaç farklı ab sayısının yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$ab - ba = 36$
$10 \cdot a + b - (10 \cdot b + a) = 36$
$9 \cdot a - 9 \cdot b = 36$
$9 \cdot (a - b) = 36$
$a - b = 4$ elde edilir. ab ve ba iki basamaklı sayı olduğundan a ve b rakamları sıfırdan farklıdır.
Bu şartlara uygun ab sayılarının kümesi {95, 84, 73, 62, 51} dir. 5 farklı ab sayısı yazılabilir.

2 SIRA SİZDE

Üç basamaklı a4b sayısının birler ve yüzler basamağı yer değiştirilerek üç basamaklı b4a sayısı elde edilmektedir. a4b – b4a = 495 olduğuna göre kaç farklı a4b üç basamaklı sayısının yazılabileceğini bulunuz.

3. ÖRNEK

İki basamaklı ab sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek iki basamaklı ba sayısı elde edilmektedir. ab + ba = 77 koşulunu sağlayan en büyük ab sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$ab + ba = 10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a = 11 \cdot a + 11 \cdot b = 11 \cdot (a + b)$ olduğundan $11 \cdot (a + b) = 77$ ise a + b = 7 dir. Bu koşulu sağlayan en büyük ab sayısı 61 dir.

3 SIRA SİZDE

ab ile ba iki basamaklı sayılar olmak üzere $\dfrac{ab + ba}{a + b}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ANAHTAR BİLGİ

Bazı problemlerde sayının bir kısmını çözümlemek çözümü kolaylaştırabilir. Örneğin 543 sayısı $5 \cdot 10^2 + 43$ şeklinde de yazılabilir.

4. ÖRNEK

Üç basamaklı 7AB sayısı, iki basamaklı AB sayısının 29 katı olduğuna göre A + B toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

7AB sayısı 700 + AB şeklinde çözümlenebilir. Dolayısıyla
$700 + AB = 29 \cdot AB$
$700 = 28 \cdot AB$ (Eşitliğin her iki yanı 28 ile bölünürse)
$25 = AB$ elde edilir. Buradan A = 2 ve B = 5 olur. A + B = 2 + 5 = 7 dir.

4 SIRA SİZDE

A – B = 3 olduğuna göre beş basamaklı 8A4BC sayısının, beş basamaklı 8B3BC sayısından kaç fazla olduğunu bulunuz.

5. ÖRNEK

a2b ile 2ab üç basamaklı sayılardır. a2b + 2ab = 334 olduğuna göre a + b toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a2b = 100 \cdot a + 2 \cdot 10 + b$ ve $2ab = 2 \cdot 100 + a \cdot 10 + b$ dir.
Bu değerler a2b + 2ab = 334 eşitliğinde yazılırsa
$100 \cdot a + 2 \cdot 10 + b + 2 \cdot 100 + a \cdot 10 + b = 334$
$110 \cdot a + 2 \cdot b + 220 = 334$
$110 \cdot a + 2 \cdot b = 114$ elde edilir.
Buradan a = 1 ve b = 2 olacağından a + b = 3 bulunur.

5 SIRA SİZDE

3ab ile a0a üç basamaklı sayılardır. 3ab + a0a = 524 olduğuna göre a + b toplamını bulunuz.

BİLİYOR MUYDUNUZ?

Üç basamaklı rakamları farklı bir doğal sayıdan aynı sayının sağdan sola yazılışı çıkarıldığında elde edilen sayının onlar basamağı daima 9 ve yüzler ile birler basamağının toplamı da 9 olur. Örneğin 962 – 269 = 693 (Birler ve yüzler basamağındaki rakamların toplamı 6 + 3 = 9 olur.)

6. ÖRNEK

Dört basamaklı bir sayının binler ve birler basamağı 1 artırılıp yüzler ve onlar basamağı 5 azaltılırsa sayının değerinin ne kadar artacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Her basamağın değişim değerini, basamak değeri ile çarpıp çıkan sonuçlar toplandığında sayının değişimi bulunur.

$+1 \cdot 1000 + (+1) \cdot 1 + (-5) \cdot 100 + (-5) \cdot 10$

$= +1001 - 550 = 451$ (451 artar.)

6 SIRA SİZDE

Beş basamaklı bir sayının binler ve onlar basamağı 2 artırılıp yüzler basamağı 3 azaltıldığında sayının değerinin ne kadar artacağını bulunuz.

7. ÖRNEK

1, 2, 3, 4, 5 rakamları kullanılarak yazılan, rakamları birbirinden farklı ABC sayılarından A = B + C koşulunu sağlayan kaç farklı ABC sayısı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

A = B + C	ABC	A = B + C	ABC
3 = 2 + 1	321	5 = 3 + 2	532
3 = 1 + 2	312	5 = 2 + 3	523
4 = 3 + 1	431	5 = 4 + 1	541
4 = 1 + 3	413	5 = 1 + 4	514

İstenen koşula uygun sayılar 321, 312, 431, 413, 541, 514, 532, 523 olmak üzere 8 tanedir.

7 SIRA SİZDE

1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamları kullanılarak yazılan, rakamları birbirinden farklı ABC sayılarından A = B + C ve B > C koşulunu sağlayan kaç farklı ABC sayısısının yazılabileceğini bulunuz.

8. ÖRNEK

ab, ba, aa, bb iki basamaklı sayılar olmak üzere $\frac{ab + ba}{aa + bb}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{10a + b + 10b + a}{10a + a + 10b + b} = \frac{11a + 11b}{11a + 11b} = 1$$

8 SIRA SİZDE

ab iki basamaklı bir sayı olmak üzere $\frac{ab}{a + b} = 6$ ise ab sayısını bulunuz.

9. ÖRNEK

Üç basamaklı ve birbirinden farklı üç doğal sayının toplamı 426 dır. Bu sayıların en büyüğünün en çok kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

En büyük sayı A olsun. A nın en büyük değeri alması için diğer sayıların koşulları sağlayan en küçük sayılar olması gerekir. Üç basamaklı birbirinden farklı en küçük iki doğal sayı 100 ve 101 dir.

100 + 101 + A = 426 ise

A = 426 – 201

A = 225 olur.

9 SIRA SİZDE

Rakamları birbirinden farklı üç basamaklı farklı dört doğal sayının toplamı 827 dir. Buna göre bu sayıların en büyüğünün en çok kaç olabileceğini bulunuz.

10. ÖRNEK

İki basamaklı ve birbirinden farklı üç doğal sayının toplamı 66 dır. Bu sayıların en büyüğünün en az kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

En büyük sayının en az olması istendiğinden sayılar birbirine yakın seçilmelidir. Bu sayıların aritmetik ortalaması $\frac{66}{3} = 22$ olduğundan sayılar 22 ye yakın seçilmelidir. Birbirinden farklı olması gerektiğinden istenen koşullardaki sayılar 21, 22, 23 olarak bulunur. Dolayısıyla en büyüğü en az 23 olabilir.

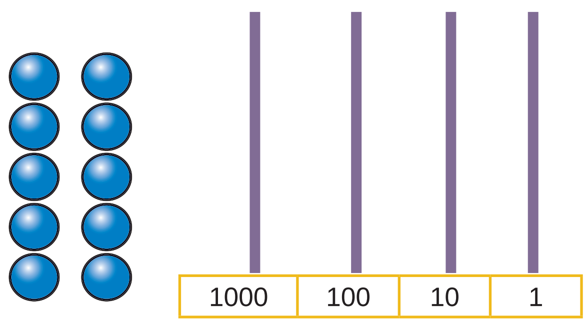
Bu örnekte istenen koşullardaki sayılardan en küçüğünün en çok 21 olabileceğine dikkat ediniz.

10 SIRA SİZDE

İki basamaklı ve birbirinden farklı üç doğal sayının toplamı 120 dir. Bu sayıların en küçüğünün en çok kaç olabileceğini bulunuz.

11. ÖRNEK

Şekildeki abaküste her bir çubuğun altında belirttiği basamak değeri yazmaktadır. Toplam 10 boncuk kullanılarak yazılabilecek 4 basamaklı rakamları farklı en büyük sayı ile en küçük sayıyı bulunuz.



ÇÖZÜM

10 boncuk kullanılarak yazılabilen rakamları farklı 4 basamaklı en büyük sayı 7210 dur.
10 boncuk kullanılarak yazılabilen rakamları farklı 4 basamaklı en küçük sayı 1027 dir.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	87 924	4	11	3100	4	1720	6	54	518	39

Alıştırmalar

1. Üç basamaklı abc sayısının son iki basamağındaki rakamların yerleri değiştirildiğinde sayının değeri 54 büyümektedir. Bu şartı sağlayan kaç farklı abc sayısının yazılabileceğini bulunuz.

2. ab iki basamaklı sayısının soluna 1 yazılarak 1ab üç basamaklı sayısı, ab iki basamaklı sayısının sağına 5 yazılarak ab5 üç basamaklı sayısı elde edilmektedir. 1ab + ab5 = 369 olduğuna göre ab iki basamaklı sayısını bulunuz.

3. İki basamaklı sayılardan kaç tanesinin, rakamlarının toplamının 7 katına eşit olduğunu bulunuz.

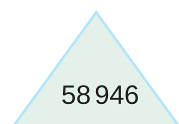
4. KL, LK, KK, LL iki basamaklı sayılar olmak üzere KL + LK + KK + LL = 198 ise K · L nin <u>en büyük</u> değerini bulunuz.

5. abcd dört basamaklı sayısının her bir basamağındaki rakam 2 artırılarak dört basamaklı xyzt sayısı elde edilmektedir. Buna göre xyzt – abcd işleminin sonucunu bulunuz.

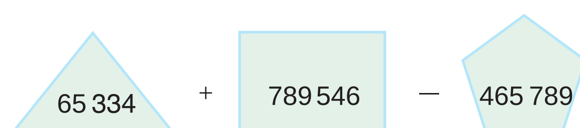
6. İki basamaklı 3 doğal sayının toplamı 81 ise bu sayılardan en büyüğünün <u>en az</u> kaç olduğunu bulunuz.

7. n kenarlı bir çokgenin içine yazılan sayının, sağdan sola n tane basamağını toplayan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Örneğin



= 6 + 4 + 9 =19 dur. Buna göre



işleminin sonucunu bulunuz.

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7
	36	24	4	20	2222	28	–1

1.1.3. Eşit Miktarda Artarak Devam Eden Sınırlı Sayıdaki Doğal Sayıların Toplamı

Ardışık Sayılar

Kendisinden önce ve sonra gelen sayılara belli bir kural ile bağlı olan ve art arda gelen sayılara ardışık sayılar denir.

0, 1, 2, 3, 4, …, n, n + 1, n + 2, ... ardışık doğal sayılar,
0, 2, 4, 6, 8, …, 2n, 2n + 2, 2n + 4, ... ardışık çift doğal sayılar,
1, 3, 5, 7, 9, …, 2n – 1, 2n + 1, 2n + 3, ... ardışık tek doğal sayılar
şeklinde adlandırılır.

Ardışık doğal sayılar birer artarak devam ederken ardışık tek doğal sayılar ve ardışık çift doğal sayılar ikişer artmaktadır.

Bunların dışında ilk terime bağlı olarak belirli bir artma miktarına sahip ardışık doğal sayılar da vardır.
Örneğin 1, 5, 9, 13, ..., n, n + 4, n + 8, ... ilk terimi 1 ve her terimi önceki terimden 4 fazla olan ardışık sayılardır.
7, 10, 13, 16, ..., n, n + 3, n + 6, ... ilk terimi 7 ve her terimi önceki terimden 3 fazla olan ardışık sayılardır.

Terimler ve Kavramlar

Ardışık doğal sayılar, ardışık tek doğal sayılar, ardışık çift doğal sayılar, terim sayısı, örüntü, ilk terim, son terim, artış miktarı

Semboller ve Gösterimler

= : Eşit
> : Büyük
< : Küçük

Ardışık sayılar şekil örüntüleri ile ilişkilendirilebilir. Aşağıda verilen şekil örüntüsünde ilk adımdan itibaren her adımda kare sayısının 4 arttığına dikkat ediniz.

1. Adım		2. Adım		3. Adım	....	n. Adım
1 tane	+4	5 tane	+4	9 tane		4n – 3 tane

Sonlu Sayıdaki Ardışık Doğal Sayıların Toplamı

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve n terim sayısı olmak üzere

$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ ardışık doğal sayıların toplamıdır.

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n \cdot (n + 1)$ ardışık çift doğal sayıların toplamıdır.

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ ardışık tek doğal sayıların toplamıdır.

1. ÖRNEK

Aşağıda verilen ardışık sayıların toplamlarını bulunuz.

a) $1 + 2 + 3 + ... + 19$

b) $2 + 4 + 6 + ... + 30$

c) $1 + 3 + 5 + ... + 39$

ç) $4 + 5 + 6 + ... + 30$

d) $10 + 12 + 14 + ... + 40$

ÇÖZÜM

a) n = 19 olduğundan $\frac{19 \cdot (19+1)}{2} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$ bulunur.

b) $2 \cdot n = 30$ ise n = 15 olduğundan $15 \cdot (15 + 1) = 240$ bulunur.

c) $2 \cdot n - 1 = 39$ ise n = 20 olduğundan $20^2 = 400$ bulunur.

ç) Bu soruda ilk üç terim olmadığından doğrudan formül uygulanamaz. Ancak istenen toplam x olmak

üzere $\underbrace{1+2+3}_{y}+\underbrace{4+5+6+...+30}_{x} = \frac{30 \cdot (30+1)}{2} = 465$

$y + x = 465$ ve $y = 1 + 2 + 3 = 6$ olduğundan $x = 465 - 6 = 459$ bulunur.

d) $10 + 12 + 14 + ... + 40 = x$ ve $y = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ olmak üzere

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + ... + 40 = y + x = 20 \cdot (20 + 1) = 420$

$20 + x = 420$ ise $x = 400$ bulunur.

1 SIRA SİZDE

Aşağıda verilen toplama işlemlerinin sonucunu bulunuz.

a) $2 + 3 + 4 + ... + 99$

b) $10 + 12 + 14 + ... + 60$

c) $7 + 9 + 11 + … + 41$

ç) $5 + 10 + 15 + 20 + … + 75$

2. ÖRNEK

a, b, c ardışık üç tek sayı ve $a > b > c$ olmak üzere $\frac{(c-a)^2 + (b-a)^3}{b-c}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Ardışık tek sayılar arasındaki fark 2 olur. Buna göre a, b, c sayıları sırası ile x + 4, x + 2, x şeklinde düşünülürse

$\frac{(c-a)^2 + (b-a)^3}{b-c} = \frac{(-4)^2 + (-2)^3}{2} = \frac{16 + (-8)}{2} = 4$ bulunur.

2 SIRA SİZDE

a, b, c ardışık üç çift sayı ve a > b > c olmak üzere $\frac{(a-c)^2+(c-b)^3}{b-a}$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. ÖRNEK

Ardışık üç doğal sayının toplamı 93 ise bu sayıların en büyüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayılar x, x + 1, x + 2 olsun. Buna göre
(x) + (x + 1) + (x + 2) = 93 olmalıdır.
3x + 3 = 93
3x = 90 olur. Buradan x = 30 bulunur.
İstenen ardışık sayılar 30, 31, 32 olur ve en büyüğü 32 dir.

3 SIRA SİZDE

Ardışık 5 çift sayının toplamı 70 ise bu sayıların en küçüğünü bulunuz.

4. ÖRNEK

A = 1 · 2 + 2 · 3 + 3 · 4 + … + 10 · 11 olmak üzere A nın her bir teriminin birinci çarpanı 1 artırılırsa A sayısının kaç artacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Her terimin birinci çarpanının 1 artırılması ile oluşan sayı B olsun. B – A farkı, A nın kaç arttığının cevabıdır. Dolayısıyla

$$\begin{array}{rl} & B = 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 + ... + 11\cdot 11 \\ - & A = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + 10\cdot 11 \\ \hline \end{array}$$

B – A = 2 + 3 + 4 + … + 11 olur. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 11 = \frac{11\cdot(11+1)}{2}$ olduğundan

$B - A = 2 + 3 + 4 + \ldots + 11 = \frac{11\cdot(11+1)}{2} - 1 = 65$ bulunur.

Terim Sayısının Hesaplanması

Sonlu sayıda terime sahip ardışık sayıların terim sayısı, bazı problemlerin çözümünde kolaylık sağlar.

Terim sayısı T olmak üzere $T = \dfrac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$ ile bulunur.

5. ÖRNEK

Üç basamaklı kaç farklı tek doğal sayı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

101, 103, 105, ..., 999 sayıları üç basamaklı tek sayılardır. Bunların sayısı T olmak üzere

$T = \dfrac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$ olduğundan $\dfrac{999 - 101}{2} + 1 = 450$ tanedir.

4 SIRA SİZDE

5 in katı olan üç basamaklı kaç farklı doğal sayı olduğunu bulunuz.

6. ÖRNEK

İki basamaklı iki doğal sayının toplamının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu tür problemlerde toplamın alabileceği en büyük ve en küçük değer bulunur, istenen toplam bu aralıktaki tüm değerleri alır.
En küçük iki basamaklı iki doğal sayının toplamı 10 + 10 = 20
En büyük iki basamaklı iki doğal sayının toplamı 99 + 99 = 198
Dolayısıyla iki basamaklı iki doğal sayının toplamı 20, 21, 22, ..., 198 değerlerini alabilir.
Terim sayısı formül yardımı ile iki basamaklı iki doğal sayının toplamının $\dfrac{198 - 20}{1} + 1 = 179$ farklı değer alabileceği bulunur.

5 SIRA SİZDE

Üç basamaklı iki doğal sayının toplamının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

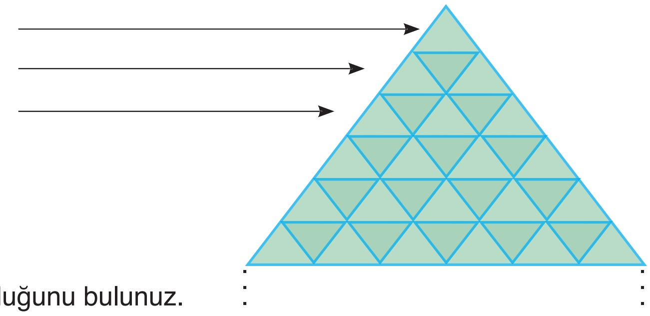
7. ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde her sıradaki üçgen sayısı verilmiştir. Buna göre

1. sırada 1 üçgen
2. sırada 3 üçgen
3. sırada 5 üçgen

.
.
.

15. sırada kaç üçgen olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

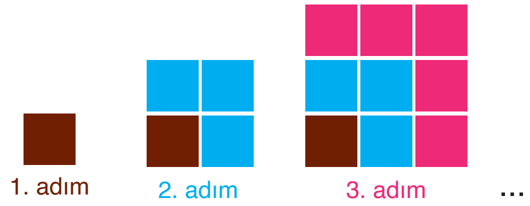
Her adımda üçgen sayısı ikişer artmaktadır. 1. sırada 1 tane, 2. sırada 3 tane, 3. sırada 5 tane, ..., 15. sırada n tane olsun. Dolayısıyla 1, 3, 5, 7, ..., n ardışık sayı grubunda 15 terim vardır. Buna göre terim sayısı formülünden $15 = \frac{n-1}{2} + 1$ olur. Buradan $14 = \frac{n-1}{2}$ ve $n - 1 = 28$ olacağından $n = 29$ bulunur.

Bu problem aşağıdaki şekilde de çözülebilir.

Sıra sayısı ile üçgen sayısı arasında n sıra sayısı olmak üzere n. sırada $2 \cdot n - 1$ tane üçgen bağıntısı vardır. 15. sırada $2 \cdot 15 - 1 = 29$ tane üçgen vardır.

6 SIRA SİZDE

Aşağıdaki şekilde birim kareler ile oluşturulan örüntü verilmiştir. 11. adımda toplam kaç birim kare oluşacağını bulunuz.



8. ÖRNEK

$5x - 2$, $3x + 1$ ardışık iki doğal sayı ve $5x - 2 > 3x + 1$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sayılar ardışık doğal sayı olduğuna göre aralarındaki fark 1 olmalıdır.

$(5x - 2) - (3x + 1) = 1$

$5x - 2 - 3x - 1 = 1$

$2x - 3 = 1$

$2x = 4$ olur.

$x = 2$ bulunur.

Belirli Bir Artış Miktarına Sahip Ardışık Sayıların Toplamı

Belirli bir artış miktarına sahip ardışık sayıların toplamı aşağıdaki bilgiler yardımı ile bulunur.
a: İlk terim
r: Artış miktarı
n: Son terim olmak üzere
$(a) + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + ... + n = \dfrac{(n+a)\cdot(n-a+r)}{2\cdot r}$ dir.

Bu eşitlik daha basit olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Belirli bir artış miktarına sahip ardışık sayıların toplamı = Terim sayısı $\cdot \dfrac{\text{İlk terim + Son terim}}{2}$ dir.

9. ÖRNEK

$13 + 17 + 21 + \dots + 57$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a = 13
r = 4
n = 57 olduğundan $13 + 17 + 21 + \dots + 57 = \dfrac{(57+13)\cdot(57-13+4)}{2\cdot 4} = \dfrac{70\cdot 48}{2\cdot 4} = 420$ bulunur.

10. ÖRNEK

Fatma, kitabını her gün bir önceki günden 5 sayfa fazla okuyarak bitirmek istemektedir. İlk gün 20 sayfa okuduğuna ve 10. gün sonunda kitabı bitirdiğine göre Fatma'nın okuduğu kitabın kaç sayfa olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Son gün olan 10. gün, n sayfa kitap okumuş olsun.

20 Sayfa	25 Sayfa	30 Sayfa ...	n Sayfa
1. gün	2. gün	3. gün ...	10. gün

Buna göre terim sayısı formülünden $10 = \dfrac{n-20}{5} + 1$ olmalıdır. Buradan $\dfrac{n-20}{5} = 9$ ve n = 65 bulunur.
İlk gün 20 sayfa, son gün 65 sayfa okuduğuna göre toplam okunan sayfa sayısı

$20 + 25 + 30 + ... + 65 = \dfrac{(65+20)\cdot(65-20+5)}{2\cdot 5} = 425$ olarak bulunur.

7 SIRA SİZDE

Bolu'da yoğun kar yağışı sonrası itfaiye çalışanları, hayvanların aç kalmaması için ormanlık alana 9 gün boyunca yem bırakmışlardır. Bu faaliyete 12 kg ile başlanıp her gün altışar kg artırılarak devam edildiğine göre 9. gün sonunda ilk günden itibaren toplam kaç kilogram yem bırakıldığını bulunuz.



11. ÖRNEK

Dörder artan ardışık 3 sayının toplamı, en küçük sayının 4 katının 4 eksiğine eşittir. Buna göre en küçük sayının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

En küçük sayı x olsun. Bu durumda ardışık üç sayının toplamı $x + (x + 4) + (x + 8) = 3x + 12$ olacaktır.
$3x + 12 = 4x - 4$ eşitliğinden $x = 16$ bulunur.

8 SIRA SİZDE

Elif ve arkadaşları, LÖSEV'e bağış yapmak için okullarında bir kumbara oluşturmuş ve biriken parayı ay sonunda banka aracılığı ile LÖSEV'e göndermişlerdir. İlk gün 20 TL, kalan 29 gün boyunca her gün bir önceki günden 4 TL daha fazla para kumbaraya atıldığına göre ay sonunda yapılan toplam bağış miktarını bulunuz.

LÖSEV Lösemili Çocuklar Vakfı

12. ÖRNEK

Bir A kümesi hakkında aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Elemanları 5 ardışık çift sayıdan oluşmaktadır.
- Kümedeki sayıların toplamı, en küçük sayının 10 katına eşittir.

Buna göre A kümesindeki en büyük sayının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A kümesinin elemanları $A = \{ x, x + 2, x + 4, x + 6, x + 8 \}$ olsun. Verilenlere göre
$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) + (x + 8) = 10x$
$5x + 20 = 10x$
$5x = 20$ olduğundan $x = 4$ olur.
A kümesinin elemanları $A = \{ 4, 6, 8, 10, 12 \}$ olacağından en büyük elemanı 12 bulunur.

13. ÖRNEK

x ve y iki pozitif tam sayı ve $x + 2 < y + 3 < 2x + 1$ olmak üzere "$x + 2$, $y + 3$, $2x + 1$" sayıları ardışık üç tek sayı olduğuna göre $x + y$ toplamının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2x + 1) - (x + 2) = 4$ olmalıdır.
$x - 1 = 4$
$x = 5$ bulunur.
İlk sayı $x + 2 = 7$ olduğundan ikinci sayı 9 olur.
$y + 3 = 9$ ise $y = 6$ bulunur. Dolayısıyla $x + y = 11$ bulunur.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8
	a) 4949, b) 910, c) 432, ç) 600	−4	10	180	1799	121	324	2340 TL

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki toplama işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

A) $3 + 5 + 7 + ... + 51$
B) $12 + 14 + 16 + ... + 32$
C) $5 + 6 + 7 + ... + 19$
D) $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2 \cdot 15$
E) $3 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + ... + 3 \cdot 21$

2. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - ... + 41 - 43$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. Ardışık 4 çift tam sayının toplamı 244 ise bu sayıların en büyüğünü bulunuz.

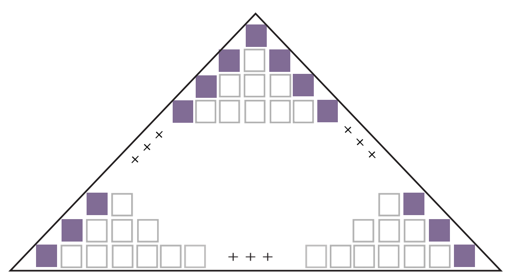
4. Salih, bahçeden kiraz toplayarak ailesine yardım etmektedir. Her gün bir önceki günden 3 kg daha fazla kiraz toplamaktadır. İlk gün 17 kg kiraz toplayan Salih'in 10. gün sonunda toplam kaç kg kiraz topladığını bulunuz.

5. $4n + 8$ ve $7n - 2$ ardışık iki çift tam sayı ve $7n - 2 > 4n + 8$ ise büyük sayının kaç olduğunu bulunuz.

6. Ardışık 4 tek tam sayının toplamı, en küçük sayının 6 katından 2 eksiktir. Buna göre en büyük sayının kaç olduğunu bulunuz.

7. Ardışık 3 doğal sayının çarpımı 60 ise bu sayıların toplamını bulunuz.

8. Aşağıdaki şekilde tamamı eş karelerden oluşan bir motif verilmiştir. Koyu renkli karelerin sayısı 41 olduğuna göre beyaz renkli karelerin sayısını bulunuz.



Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8
	A) 675 B) 242 C) 180 D) 240 E) 360	–22	64	305	26	13	12	400

1.2. Bölünebilme

Hazırlık Çalışması

Juniper Green (Juniper Grin) Oyunu

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Oyunu yukarıdaki tabloyu kullanarak aşağıdaki kurallara göre iki kişilik gruplar hâlinde oynayabilirsiniz.

- 1 sayısı kullanılmaz.
- İlk oyuncu tablo üzerinde bir çift sayı seçerek oyuna başlar.
- Rakip oyuncu, seçilen sayının çarpanlarından veya katlarından olan bir sayı seçer ve tablo üzerinde işaretler.
- Herhangi bir oyuncu sayı seçemeyinceye kadar oyun devam eder.
- Rakibi sayı seçemeyecek duruma gelen oyuncu, oyunu kazanmış olur.
- Kural dışı hareket eden oyuncu, oyunu kaybeder.

Aşağıdaki soruları oyun sırasında cevaplamaya çalışınız.

- Neden ilk oyuncu çift sayı seçmelidir?
- Oyunda kaybetmeye sebep olan sayıların özelliği nedir?
- Hangi sayıları seçerseniz rakibiniz zor durumda kalır?

Kaynak: GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 2008, Cilt 28, Sayı 3. s. 75-98.
(Düzenlenmiştir.)

1.2.1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

Bölme İşlemi ve Özellikleri

Bir tam sayının başka bir pozitif tam sayıya bölünebilmesi, bölünen sayının bölen sayı kadar eşit sayı gruplarına ayrıldığını göstermektedir.

Bölme işlemlerinde; bölünen, bölüm, bölen ve kalan arasındaki bağıntılar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & C \\ -\quad & \\ \hline K & \end{array}$$

A ⟶ bölünen
B ⟶ bölen
C ⟶ bölüm
K ⟶ kalan

1. $A = B \cdot C + K$
2. $0 \leq K < B$
3. $K < C$ ise bölen ile bölüm yer değiştirebilir.
4. $K = 0$ ise A sayısı B ye tam bölünür ve bu durum B I A şeklinde gösterilir. B I A gösterimi "B böler A" şeklinde okunur.

Terimler ve Kavramlar

Bölme, bölünebilme, bölüm, kalan, kalanlı bölünme, asal sayı, aralarında asal sayılar

Semboller ve Gösterimler

$<$: Küçük
$>$: Büyük
$\leq$: Küçük veya eşit
$\geq$: Büyük veya eşit
$\in$: Eleman
B I A : B böler A

1. ÖRNEK

Yanda verilen kalanlı bölme işlemine göre A sayısının değerini bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} A & 12 \\ \cline{2-2} & 10 \\ -\quad & \\ \hline 3 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

Bölünen = Bölen · Bölüm + Kalan eşitliğinden yola çıkarak
$A = 12 \cdot 10 + 3$
$A = 123$ bulunur.

1 SIRA SİZDE

Yanda verilen bölme işlemi için aşağıda verilen ifadeleri doğru (D) veya yanlış (Y) olarak belirleyiniz.

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & C \\ -\quad & \\ \hline K & \end{array}$$

a) $K = 0$ olabilir. (...)
b) $K > 0$ olabilir. (...)
c) $K > B$ olabilir. (...)
ç) $A = B \cdot C$ eşitliği kesinlikle doğrudur. (...)
d) $C > B$ olabilir. (...)

2. ÖRNEK

Yanda verilen bölme işlemine göre A tam sayısının alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} A & 6 \\ \cline{2-2} - \quad & 5 \\ \hline k & \end{array}$$

ÇÖZÜM

$A = 6 \cdot 5 + k = 30 + k$ dir. Ayrıca kalan sayı $0 \leq k < 6$ eşitsizliğini sağlayacağından k sayısı 0, 1, 2, 3, 4, 5 tam sayı değerlerini alabilir. Böylece

A nın en büyük değeri $k = 5$ için $A = 30 + 5 = 35$ ve

A nın en küçük değeri $k = 0$ için $A = 30 + 0 = 30$ bulunur.

2 SIRA SİZDE

Yanda verilen bölme işleminde, k tam sayı olmak üzere A tam sayısının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} A & 10 \\ \cline{2-2} - \quad & 6 \\ \hline k^2 & \end{array}$$

3. ÖRNEK

AB iki basamaklı sayısının A + B ile bölümünden kalan 2 ve bölüm 5 tir. Buna göre AB iki basamaklı sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$AB = (A + B) \cdot 5 + 2$ eşitliğinden AB iki basamaklı sayısı çözümlenirse

$10 \cdot A + B = 5 \cdot A + 5 \cdot B + 2$

$5 \cdot A = 4 \cdot B + 2$ eşitliği elde edilir. Buradan

$5 \cdot A = 4 \cdot B + 2$ AB sayısının 22 ve 67 olmak üzere 2 farklı değer aldığı görülür.

A	B
2	2
6	7

3 SIRA SİZDE

AB iki basamaklı sayısının A + B ile bölümünden kalan 2 ve bölüm 6 dır. Buna göre AB iki basamaklı sayısının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ANAHTAR BİLGİ

A tam sayısının C tam sayısı ile bölümünden elde edilen kalan m ve B tam sayısının C tam sayısı ile bölümünden elde edilen kalan n olmak üzere ($m, n \in \mathbb{N}$)

A + B sayısının C ile bölümünden kalan: $m + n$
A – B sayısının C ile bölümünden kalan: $m - n$
$A \cdot B$ sayısının C ile bölümünden kalan: $m \cdot n$
$t \cdot A$ sayısının C ile bölümünden kalan: $t \cdot m$ ($t \in \mathbb{N}$)
A^t sayısının C ile bölümünden kalan: m^t ($t \in \mathbb{N}$)

Eğer elde edilen kalanlar C den büyük ise tekrar C ile bölme işlemi yapılıp kalan bulunur.

Bir A sayısının C ile bölümünden kalan sayının alabileceği değerlerin kümesi {0, 1, 2, 3, ..., C – 1} şeklindedir.

4. ÖRNEK

A sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 ve B sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre aşağıda verilen ifadelerin 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.

a) $A + B$ b) $A \cdot B$ c) $3 \cdot A + 5 \cdot B$ ç) $A^2 \cdot B$ d) $A^3 \cdot 4 \cdot B^2$

ÇÖZÜM

a) A + B nin 5 ile bölümünden kalanı bulmak için A ve B nin kalanları toplanıp 5 ile bölümünden kalana bakılır. $2 + 3 = 5$ ve 5 in 5 ile bölümünden kalan 0 olur.
b) $2 \cdot 3 = 6$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 1 olur.
c) $3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 1 bulunur.
ç) $2^2 \cdot 3 = 12$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 bulunur.
d) $2^3 \cdot 4 \cdot 3^2 = 8 \cdot 4 \cdot 9 = 288$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 bulunur.

4 SIRA SİZDE

A sayısının 7 ile bölümünden kalan 4 ve B sayısının 7 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre aşağıda verilen ifadelerin 7 ile bölümünden kalanını bulunuz.

a) $A - B$ b) $A \cdot B$ c) $A + 5 \cdot B$

ç) $5 \cdot A - 4 \cdot B$ d) $A^2 \cdot B^3$

Bölünebilme Kuralları

Bölme işlemlerinde, bölme işlemi yapmadan verilen bir tam sayının başka bir tam sayı ile bölünüp bölünmediğine karar verilmesine yarayan ve kalanın bulunmasını sağlayan bazı kurallar vardır. Bu kurallar aşağıda gösterilmiştir.

2 ile Bölünebilme

Çift tam sayılar 2 ile bölünebilir, tek tam sayıların 2 ile bölümünden kalan 1 dir.

5. ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 2 ile bölümünden kalanı bulunuz.

a) 89 647 b) 719 c) $999 \cdot 123$ ç) 0 d) –22

ÇÖZÜM

a) 89 647 sayısı tek tam sayı olduğundan kalan 1 olur.
b) 719 sayısı tek tam sayıdır. Dolayısıyla kalan 1 olur.
c) $999 \cdot 123$ işleminin sonucu tek tam sayı olduğundan kalan 1 olur.
ç) 0 sayısı, sıfırdan farklı her tam sayıya bölünebilir. Dolayısıyla kalan 0 olur.
d) –22 çift tam sayı olduğundan 2 ile bölünebilir. Dolayısıyla kalan 0 olur.

3 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 3 ün katı olan sayılar, 3 ile bölünebilir. Bir tam sayının 3 ile bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların 3 ile bölümünden kalanı bulunuz.

a) 55 679 b) 7^{15} c) $888 \cdot 113$ ç) 7!

ÇÖZÜM

a) $5 + 5 + 6 + 7 + 9 = 32$ olur. 32 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 55 679 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 bulunur.

b) 7 nin 3 ile bölümünden kalan 1 dir. $1^{15} = 1$ olduğundan 7^{15} sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 olur.

c) $8 + 8 + 8 = 24$ olur. 24 ün 3 ile bölümünden kalan = 0
$1 + 1 + 3 = 5$ olur. 5 in 3 ile bölümünden kalan = 2 } olduğundan $888 \cdot 113$ sayısının 3 ile bölümünden kalan, $0 \cdot 2 = 0$ ın 3 ile bölümünden kalana eşittir. Dolayısıyla kalan 0 olur.

ç) $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ sayısında 3 sayısı çarpan olarak bulunduğundan 7! sayısı 3 ün bir katıdır. Dolayısıyla 3 ile bölünebilir, kalan 0 dır.

ANAHTAR BİLGİ

Bir sayının 3 e bölümünden kalan bulunurken sayının rakamları toplamı iki ya da daha fazla basamaklı bir sayı ise tekrar rakamlar toplamı alınıp 3 e bölümünden kalan bulunabilir.

Örneğin 25 basamaklı 777 ... 7 sayısının 3 e bölümünden kalan bulunurken verilen sayının rakamlar toplamı $25 \cdot 7 = 175$ olur. 175 sayısının 3 ile bölümünden kalanı bulmak için tekrar 3 ile bölünebilme kuralı uygulanarak rakamları toplamı bulunur ve sonuca gidilir. $1 + 7 + 5 = 13$ sayısının 3 ile bölümünden kalan 1 dir. Dolayısıyla 25 basamaklı 777 . . . 7 sayısının da 3 ile bölümünden kalan 1 olur.

4 ile Bölünebilme

Son iki basamağındaki sayı 4 ün katı olan sayılar 4 ile bölünebilir.
Örneğin 1900, 22 352, 1416 sayıları 4 ile bölünebilir.

Bir sayının 4 ile bölümünden kalan ise son iki basamağını oluşturan sayının 4 e bölümünden kalana eşittir.

7. ÖRNEK

12 875 sayısının 4 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

Son iki basamağı, 4 e bölünürse kalan 3 olacağından 12 875 sayısının da 4 ile bölümünden kalan 3 olur.

$$\begin{array}{r|l} 75 & 4 \\ \cline{2-2} -72 & 18 \\ \hline 3 & \end{array}$$

8. ÖRNEK

Aşağıda verilen 3 basamaklı sayıların 4 ile bölünebilmesi için a nın alabileceği değerleri bulunuz.

a) 46a b) 5a2 c) 7aa ç) aaa

ÇÖZÜM

a) 46a
- a = 0 için 460
- a = 4 için 464
- a = 8 için 468

$a \in \{0, 4, 8\}$ bulunur.

b) 5a2
- a = 1 için 512
- a = 3 için 532
- a = 5 için 552
- a = 7 için 572
- a = 9 için 592

$a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ bulunur.

c) 7aa
- a = 0 için 700
- a = 4 için 744
- a = 8 için 788

$a \in \{0, 4, 8\}$ bulunur.

ç) aaa
- a = 4 için 444
- a = 8 için 888

$a \in \{4, 8\}$ bulunur.

5 ile Bölünebilme

Birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan sayılar, 5 ile bölünebilir.

Bir sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalan, birler basamağındaki sayının 5 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

9. ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.

a) 347 b) 995 c) 880 ç) 9! d) –45

ÇÖZÜM

a) 7 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 347 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olur.

b) 995 sayısının birler basamağı 5 olduğundan 5 ile bölünebilir. Kalan 0 olur.

c) 880 sayısının birler basamağı 0 olduğundan 5 ile bölünebilir. Kalan 0 olur.

ç) 9! sayısı içerisinde 5 çarpanı vardır. Dolayısıyla kalan 0 bulunur.

d) –45 sayısının birler basamağı 5 olduğundan 5 ile bölünebilir. Dolayısıyla kalan 0 olur.

10. ÖRNEK

Aşağıda “SAYGI” kelimesinin yan yana, 40 defa yazılışı verilmiştir. Buna göre soldan sağa 187. harfin hangisi olacağını bulunuz.

S A Y G I S A Y G I S A Y G I ... S A Y G I

ÇÖZÜM

5 harften oluşan “SAYGI” kelimesinin yan yana yazılışında 5 in katları daima I harfine denk gelir. 185. harf I harfi olacağından 187. harf A olacaktır. Bu örnek 187 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2 olduğundan I harfinden 2 sonraki harf A dır, şeklinde de çözülebilir.

S	A	Y	G	I	S	A	Y	G	I	...	S	A	Y	G	I
1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	**10**		196	197	198	199	**200**

5 SIRA SİZDE

5 harften oluşan “VATAN” kelimesinin yan yana 30 defa yazılması ile oluşan ifadede soldan sağa 108. sıradaki harfin hangisi olacağını bulunuz.

8 ile Bölünebilme

Son üç basamağındaki sayı 8 in katı olan sayılar 8 ile bölünebilir.
Örneğin 567 000, 335 880, 3160, 94 080 sayıları 8 ile bölünebilir.

Bir sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalan, sayının son üç basamağındaki sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalana eşittir.

11. ÖRNEK

15 750 sayısının 8 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

750 sayısının 8 ile bölümünden kalan 6 olduğundan 15 750 sayısının 8 ile bölümünden kalan 6 olur.

9 ile Bölünebilme

Rakamlarının toplamı 9 un katı olan sayılar 9 ile bölünebilir.

Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, bu sayının rakamlarının toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

12. ÖRNEK

6 basamaklı 764a2b sayısı 5 ile bölünebilen bir tek sayıdır. Bu sayının 9 ile bölünebilmesi için a sayısının kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

764a2b sayısı 5 ile bölünebildiğinden b sayısı 0 veya 5 olmalıdır. 764a2b sayısı tek sayı olarak verildiğinden b = 5 bulunur. 764a25 sayısının 9 ile bölünebilmesi için
$7 + 6 + 4 + a + 2 + 5 = 9 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. (Rakamları toplamı 9 veya 9 un katı olmalıdır.)
$24 + a = 9 \cdot k$ olması için a = 3 bulunur.

6 SIRA SİZDE

5 basamaklı 8a42b sayısı 5 ile bölünebilen bir sayıdır. Bu sayının 9 ile bölünebilmesi için a nın alabileceği değerleri bulunuz.

10 ile Bölünebilme

Birler basamağı 0 olan sayılar 10 ile bölünebilir.

Bir sayının 10 ile bölümünden kalan, birler basamağındaki rakama eşittir.

13. ÖRNEK

4 basamaklı a47b sayısının 10 ile bölümünden kalan 2 dir. a47b sayısı, 3 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir sayının 10 ile bölümünden kalan bu sayının birler basamağına eşittir. Dolayısıyla b = 2 olur.
a47b sayısı 3 ile bölünüyor ise
$a + 4 + 7 + 2 = 3 \cdot k, \; k \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. (Rakamları toplamı 3 ün katı olmalıdır.)
$a + 13 = 3 \cdot k$ ise a sayısı 2, 5, 8 olmak üzere üç farklı değer alabilir.

BİLİYOR MUYDUNUZ?

11 haneli T.C. kimlik numaranız belirli matematiksel bağıntılar içerir. Bunlardan biri 10 ile bölünebilme kuralı ile ilgilidir. T.C. kimlik numarasının ilk 10 hanesinin toplamının 10 ile bölümünden kalan 11. haneyi verir.

Çevrenizdeki bu kuralı bilmeyen kişilerle "T.C. kimlik numaranın ilk on hanesini söyle 11. haneyi bulayım." oyunu oynayabilirsiniz.

11 ile Bölünebilme

Sayının 11 ile bölümünden kalanı bulmak için birler basamağından başlayarak her basamak için sırasıyla +, –, +, –, +, –, ... işaretleri yazılır. "+" ile işaretlenenlerin toplamından "–" ile işaretlenen rakamların toplamı çıkarılır. Sonuç 0, 11 veya 11 in bir tam sayı katıysa verilen sayı 11 ile bölünebilir. Sayının 11 ile bölümünden kalan, bulunan toplamın 11 ile bölümünden kalanına eşittir.

Sonuç negatif bir tam sayı çıktığında çıkan sayı pozitif olana kadar 11 sayısının katları eklenir. Elde edilen pozitif sayı, kalana eşittir.

14. ÖRNEK

Aşağıda verilen sayıların 11 ile bölümünden kalanı bulunuz.

a) 454 613 b) abbbaaba c) 121 ç) 111 d) 928 374

ÇÖZÜM

a) $\underset{-}{4}\ \underset{+}{5}\ \underset{-}{4}\ \underset{+}{6}\ \underset{-}{1}\ \underset{+}{3}$ işaretlenip (3 + 6 + 5) – (1 + 4 + 4) işlemi yapılırsa kalan 14 – 9 = 5 bulunur.

b) $\underset{-}{a}\ \underset{+}{b}\ \underset{-}{b}\ \underset{+}{b}\ \underset{-}{a}\ \underset{+}{a}\ \underset{-}{b}\ \underset{+}{a}$ işaretlenip (a + a + b + b) – (b + a + b + a) işlemi yapılırsa (2a + 2b) – (2a + 2b) = 0 bulunur. Verilen sayı 11 ile bölünebilir.

c) $\underset{+}{1}\ \underset{-}{2}\ \underset{+}{1}$ işaretlenip (1 + 1) – (2) işlemi yapılırsa 2 – 2 = 0 bulunur. 121 sayısı 11 ile bölünebilir.

ç) $\underset{+}{1}\ \underset{-}{1}\ \underset{+}{1}$ işaretlenip (1+1) – (1) işlemi yapılırsa 2 – 1 = 1 kalanı bulunur.

d) $\underset{-}{9}\ \underset{+}{2}\ \underset{-}{8}\ \underset{+}{3}\ \underset{-}{7}\ \underset{+}{4}$ işaretlenip (4 + 3 + 2) – (9 + 8 + 7) işlemi yapılırsa 9 – 24 = –15 bulunur. Burada kalan negatif olduğundan sayıya 11 in 2 katı eklenerek pozitif hâle getirilir. Kalan –15 + 2 · 11 = 7 bulunur.

Asal Sayılar

1 ve kendisinden başka pozitif tam sayıya bölünemeyen 1 den büyük pozitif tam sayıların her birine asal sayı denir. Örneğin 2, 3, 5, 7, 11, 13 sayıları birer asal sayıdır.

- En küçük asal sayı 2 dir.
- 2 den başka çift asal sayı yoktur.
- Aralarındaki fark 1 olan asal sayılar sadece 2 ve 3 tür.

Aralarında Asal Sayılar

1 den başka ortak pozitif tam sayı böleni olmayan tam sayılara aralarında asal sayılar denir. Örneğin 5 ve 9 sayılarının ikisini de bölebilen 1 den başka pozitif tam sayı yoktur. Dolayısıyla 5 ve 9 aralarında asaldır.

Aralarında asal olan sayıların asal sayı olma zorunluluğunun olmadığına dikkat edilmelidir. Örneğin 9 ile 8 aralarında asal sayılardır. Ancak 9 ve 8 asal sayı değildir.

ANAHTAR BİLGİ

Aralarında asal iki sayıdan her birine bölünebilen bir sayı bu sayıların çarpımına da bölünebilir.

Hem 2 hem 3 ile bölünebilen bir sayı 6 ile bölünebilir. (2 ile 3 aralarında asaldır.)
Hem 3 hem 4 ile bölünebilen bir sayı 12 ile bölünebilir. (3 ile 4 aralarında asaldır.)
Hem 3 hem 5 ile bölünebilen bir sayı 15 ile bölünebilir. (3 ile 5 aralarında asaldır.)
Hem 3 hem 8 ile bölünebilen bir sayı 24 ile bölünebilir. (3 ile 8 aralarında asaldır.)
Hem 4 hem 9 ile bölünebilen bir sayı 36 ile bölünebilir. (4 ile 9 aralarında asaldır.)
Hem 4 hem 11 ile bölünebilen bir sayı 44 ile bölünebilir. (4 ile 11 aralarında asaldır.)

Bu konu ile ilgili problemler çözülürken verilen iki bölünebilme kuralından birler ve onlar basamağını ilgilendiren kuralın önce değerlendirilmesi, problemin çözümünü kolaylaştıracaktır.

15. ÖRNEK

Üç basamaklı 47a sayısının 6 ile bölünebilmesi için a rakamının alabileceği değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$6 = 3 \cdot 2$ olduğundan 47a sayısının 2 ve 3 ile bölünebilmesi gerekir.
2 ile bölünebilmesi için
a rakamı 0, 2, 4, 6, 8 değerlerini alabilir.
3 ile bölünebilmesi için
$4 + 7 + a = 3 \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmalıdır.
$11 + a = 3 \cdot k$ ise a rakamı 1, 4, 7 değerlerini alabilir.
Dolayısıyla 47a sayısının 2 ve 3 ile bölünebilmesi için $a = 4$ olmalıdır.

16. ÖRNEK

Dört basamaklı 8a3b sayısı 15 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

15 ile bölünebilen bir sayı 3 ve 5 ile bölünebilir. 5 ile bölündüğünden birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır.
$b = 0$ ise 8a30 sayısı 3 ile bölündüğünden
$8 + a + 3 + 0 = 3 \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmalıdır.

$11 + a = 3 \cdot k$
└ a rakamı 1, 4, 7 değerlerini alabilir.

$b = 5$ ise 8a35 sayısı 3 ile bölündüğünden
$8 + a + 3 + 5 = 3 \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) olmalıdır.

$16 + a = 3 \cdot k$
└ a rakamı 2, 5, 8 değerlerini alabilir.

a rakamının alabileceği değerlerin kümesi {1, 2, 4, 5, 7, 8} olarak bulunur.

7 SIRA SİZDE

Beş basamaklı 18a4b sayısı 12 ile bölünebilmektedir. Buna göre a + b toplamının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7
	a) D, b) D, c) Y, ç) Y, d) D	129	118	a) 2, b) 1, c) 0, ç) 5, d) 2	T	4, 8	17

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeleri doğru ya da yanlış olarak belirleyiniz.

A) (...) Her tam sayı 1 ile kalansız bölünür.
B) (...) 0 her pozitif tam sayıya bölünebilir.
C) (...) 9 a bölünebilen her sayı 6 sayısına da bölünebilir.
D) (...) 8 e bölünebilen her sayı 4 sayısına da bölünebilir.
E) (...) 5 e bölünebilen her çift sayı 10 sayısına da bölünebilir.

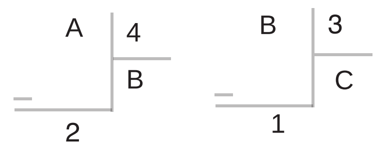
2. Dört basamaklı a451 sayısı 3 ile bölünebilmektedir. Buna göre a sayısının alabileceği <u>en büyük</u> değeri bulunuz.

3. Kadir, dedesinin dairesine yemek götürürken basamakları ikişer ikişer çıkıp üçer üçer inebilmektedir. Merdiven sayısı 2 basamaklı bir sayı olduğuna göre merdivenin basamak sayısının <u>en fazla</u> kaç olabileceğini bulunuz.

4. Aşağıdaki tablo, 2 satır ve 40 sütundan oluşmaktadır. Buna göre soldan sağa 28. ve 40. sütundaki harfleri bulunuz.

L	O	K	M	A	N	L	O	K	M	A	N	...		...	
B	Ü	Ş	R	A	B	Ü	Ş	R	A	B	Ü	...		...	
													28.		40.

5. Aşağıda verilen bölme işlemlerine göre A sayısının 12 ile bölümünden kalanı bulunuz.



6. Üç basamaklı a3b sayısı 36 ile bölünebildiğine göre a + b toplamının <u>en fazla</u> kaç olacağını bulunuz.

7. Beş basamaklı a124b sayısı 5 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 3 e bölümünden kalan 1 olduğuna göre a sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

8. Altı basamaklı 4a75b2 sayısı 11 ile bölünebilmektedir. Buna göre a – b farkının hangi değerleri alabileceğini bulunuz.

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8
	A) D, B) D, C) Y, D) D, E) D	8	96	28. M / Ş, 40. M / A	6	15	3, 6, 9, 1, 4, 7	4, –7

1.2.2. Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı

Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenleri

15 sayısını bölebilen pozitif tam sayılar 1, 3, 5, 15 tir. Dolayısıyla 15 sayısını bölebilen 4 pozitif tam sayı vardır.

Büyük sayıların bölenlerinin sayısını yukarıdaki gibi tek tek belirlemek vakit alabilir. Bunun için aşağıdaki bilgiler kullanılarak bir tam sayının kaç tane pozitif tam sayı böleni olduğu bulunabilir.

A, bir pozitif tam sayı; $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ asal sayılar ve $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ doğal sayılar olmak üzere A tam sayısının $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$ şeklinde ifade edilmesine, A sayısının asal çarpanların çarpımı ile gösterimi veya A sayısının asal çarpanlarına ayrılışı denir. $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ sayıları, A nın asal çarpanlarıdır.

Bir A sayısının asal çarpanlarının kuvvetleri biçiminde yazılmış şekli $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$ olmak üzere

A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı
$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot (a_3 + 1) \cdot ... \cdot (a_n + 1)$ bağıntısı ile bulunur.

Terimler ve Kavramlar

Bir sayının bölenleri, çarpan, asal çarpan, pozitif tam sayı böleni, negatif tam sayı böleni

Bu bölümden itibaren sadeliği korumak için "tam sayı böleni" ifadesi yerine " bölen" tercih edilecektir.

1. ÖRNEK

280 sayısını, asal çarpanlarının çarpımı şeklinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Verilen sayı asal çarpanlarına bölünerek bulunur.

280	2
140	2
70	2
35	5
7	7
1	

$280 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$

Burada 2, 5, 7 sayıları, 280 sayısının asal çarpanlarıdır.
280 sayısının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde gösterimi $280 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ şeklindedir.

2. ÖRNEK

45 sayısının pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$45 = 5^1 \cdot 3^2$ olduğundan 45 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı
$(1 + 1) \cdot (2 + 1) = 6$ tanedir.

3. ÖRNEK

720 sayısının pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

720 sayısının asal çarpanlarının çarpımı olarak yazılması

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ şeklindedir.
Buna göre 720 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı
$(4 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ bulunur.

4. ÖRNEK

120 sayısının asal olmayan pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

120 sayısının asal çarpanlarının çarpımı olarak yazılışı

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ şeklindedir. Buna göre $(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ tane pozitif böleni vardır. Bunlardan 2, 3, 5 sayıları asal bölenleridir. Dolayısıyla asal olmayan pozitif bölenlerinin sayısı $16 - 3 = 13$ tanedir.

5. ÖRNEK

x bir doğal sayı olmak üzere $\frac{3x+40}{x}$ ifadesi bir tam sayı ise x in kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{3x+40}{x} = 3 + \frac{40}{x}$ olduğundan x sayısı, 40 ın pozitif bölenlerinin sayısı kadar farklı değerler alır.

$40 = 2^3 \cdot 5^1$ olduğundan x sayısı $(3+1) \cdot (1+1) = 8$ farklı değer alır.

1 SIRA SİZDE

x bir doğal sayı olmak üzere $\frac{60+5x}{x}$ ifadesi bir tam sayı ise x in kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

6. ÖRNEK

140 cm uzunluğundaki bir tahta aşağıdaki kurallara göre eşit uzunlukta parçalara ayrılacaktır.

- En az iki tahta parçası olmalıdır.
- Her tahta parçasının uzunluğu en çok 28 cm ve tam sayı olmalıdır.

Verilenlere göre bu tahtanın eşit uzunlukta kaç farklı parçaya ayrılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

140 sayısının asal çarpanlarının çarpımı şeklinde yazılışı

140	2
70	2
35	5
7	7
1	

$140 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$ olduğundan 140 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı
$(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 12$ bulunur.

140 cm uzunluğundaki tahta,140 sayısının pozitif bölenleri kadar eşit parçalara ayrılabilir. 140 sayısının pozitif bölenleri 1, 2, 4, 5, 7, ..., 70, 140 olmak üzere 12 tanedir. Tahtanın en az iki parça olması gerektiğinden 140 cm uzunluğunda 1 parça olamaz. Ayrıca her tahta parçasının uzunluğu en çok 28 cm olabildiğinden tahta, 2 ya da 4 parça olamaz.

Dolayısıyla 140 cm uzunluğundaki bu tahta 1 parçaya, 2 parçaya ve 4 parçaya ayrılamadığından istenen koşullarda $12 - 3 = 9$ farklı eşit parçaya ayrılabilir.

ANAHTAR BİLGİ

Bir tam sayının pozitif bölenlerinin sayısı kadar negatif bölenleri de vardır. Örneğin 12 sayısının pozitif bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 12 olmak üzere 6 tanedir. Benzer şekilde 12 sayısının negatif bölenleri –1, –2, –3, –4, –6, –12 olmak üzere 6 tanedir.

Bir A sayısının asal çarpanlarının kuvvetleri biçiminde yazılmış şekli $A = x^a \cdot y^b \cdot z^c$ olsun.
A nın tam sayı bölenlerinin sayısı $2 \cdot (a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1)$ bağıntısı ile bulunur.

7. ÖRNEK

108 sayısını bölen kaç farklı tam sayı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$108 = 2^2 \cdot 3^3$ olduğundan 108 sayısının bölenlerinin sayısı
$2 \cdot (2 + 1) \cdot (3 + 1) = 24$ tanedir.

2 SIRA SİZDE

225 sayısını bölen kaç farklı tam sayı olduğunu bulunuz.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2
	12	18

Alıştırmalar

1. 440 sayısının pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.

2. 72 sayısının asal olmayan pozitif bölenlerinin sayısını bulunuz.

3. Aşağıdaki sayılardan hangisinin 2, 3, 5 ve 11 sayılarının her birine tam bölündüğünü bulunuz.

A) 30
B) 110
C) 165
D) 1112
E) 330

4. Sapanca sahilinin daha temiz olmasını isteyen Sinem, belediyeye e-posta göndererek sahil şeridi boyunca çöp kovası yerleştirilmesini önermiştir. Bu öneriyi dikkate alan belediye yetkilileri, 1600 m lik sahil şeridi boyunca çöp kovası yerleştirme kararı almıştır. Çöp kovaları aşağıdaki kurallara göre yerleştirilecektir.

- Her çöp kovası arası en az 10 metre olacaktır.
- Çöp kovaları eşit aralıklara sahip olacaktır.

Buna göre bu çöp kovalarının kaç farklı şekilde yerleştirilebileceğini bulunuz.

5. $A = 2^4 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere A sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 60 olduğuna göre n sayısını bulunuz.

6. 210 sayısının asal çarpanlarının sayısını bulunuz.

7. 60 sayısının asal olmayan bölenlerinin sayısını bulunuz.

8. A sayısının kendisinden küçük, pozitif bölenlerinin toplamı, A ya eşit oluyor ise A sayısına "mükemmel sayı" denir. Buna göre aşağıdaki sayılardan hangisi mükemmel sayıdır?

A) 5
B) 6
C) 12
D) 15
E) 19

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8
	16	10	E	16	2	4	21	B

Öz Değerlendirme Formu

Bu ünite kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için **EVET**, kazanamadığınız beceriler için **HAYIR** kutucuğuna x işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

	Değerlendirme Ölçütleri	EVET	HAYIR
1	Verilen bir sayının hangi kümeye ait olduğunu belirleyebilirim.		
2	Sayı kümelerini, birbiri ile alt küme olup olmamasına göre ilişkilendirebilirim.		
3	Doğal sayıları çözümleyebilirim.		
4	Doğal sayıların çözümlenmesi ile ilgili problemler çözebilirim.		
5	Sonlu sayıdaki ardışık sayıların toplamlarını bulabilirim.		
6	Ardışık sayıların toplamlarını veren bağıntılar yardımı ile problemler çözebilirim.		
7	Bölme işleminin özelliklerini uygulayabilirim.		
8	Bölünebilme kurallarını uygulayabilirim.		
9	Verilen bir sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulabilirim.		

Değerlendirme

Değerlendirme sonunda **HAYIR** cevaplarınızı gözden geçiriniz. Öğrendiklerinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz.

Ölçme ve Değerlendirme

A. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun kelimelerle doldurunuz.

1. 2 ile bölünebilen tam sayılara .... sayı denir.
2. 1 den başka pozitif tam sayı ortak böleni olmayan pozitif tam sayılara .... denir.
3. Kendisinden önce ve sonra gelen sayılara belli bir kural ile bağlı olan ve art arda gelen sayılara .... denir.
4. 1 ve kendisinden başka pozitif tam sayıya bölünemeyen 1 den büyük pozitif tam sayıların her birine .... denir.

B. Aşağıdaki açık uçlu soruların cevaplarını ilgili alana yazınız.

5. a ve b birbirinden farklı rakamlardır.
Buna göre a·b çarpımının <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerlerinin toplamını bulunuz.

6. **Dört basamaklı <u>en büyük</u> negatif tam sayı ile rakamları farklı, dört basamaklı <u>en küçük</u> pozitif tam sayının toplamını bulunuz.**

7. m, n iki basamaklı farklı doğal sayılardır.
Buna göre m + n = 26 ise n sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

8. ab ve ba iki basamaklı sayılardır.
Buna göre ab + ba = 55 koşulunu sağlayan <u>en büyük</u> ab sayısını bulunuz.

9. 3ABC dört basamaklı, ABC üç basamaklı sayılardır.
3ABC sayısı ABC sayısının 25 katına eşit ise ABC sayısını bulunuz.

10. Yaşları, iki basamaklı birbirinden farklı sayılar olan dört kişinin yaşlarının toplamı 126 dır.
Buna göre en büyük kişinin yaşının <u>en az</u> kaç olacağını bulunuz.

11. İki basamaklı ab sayısı, rakamları toplamının 3 katına eşittir.
Buna göre ab sayısını bulunuz.

12. Betül, dışarıda zor şartlar altında yaşayan bir kediyi evine alıp beslemek istemektedir. Betül'ün evine çıkan 5 basamaklı bir merdiven bulunmaktadır. Betül; ilk basamağa 1, sonraki her basamağa öncekinden 2 fazla kedi maması koyarak kediyi evine almıştır.
Kedi bütün mamayı yediğine göre kedinin toplam kaç tane mama yediğini bulunuz.

13. **Ardışık beş doğal sayının toplamı 115 ise bu sayıların <u>en küçüğünü</u> bulunuz.**

14. A = 3 + 5 + 7 +...+ 21 ve B = 4 + 6 + 8 + ... + 22 dir.
Buna göre B – A farkını bulunuz.

15. Yandaki şekilde kalanlı bölme işlemi verilmiştir.
Buna göre A sayısının alabileceği <u>en büyük</u> değeri bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} A & 7 \\ \hline - & 12 \\ k & \end{array}$$

16. Rakamları birbirinden farklı, dört basamaklı 6a4b sayısı, 12 ile bölünebilmektedir.
Buna göre a sayısının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

17. "SAYI" kelimesinin yan yana 30 defa yazılması ile SAYISAYISAYI . . . SAYI ifadesi oluşmuştur.
Buna göre soldan sağa 78. sıradaki harfin hangisi olacağını bulunuz.

18. 135 sayısının asal olmayan pozitif tam bölenlerinin sayısını bulunuz.

19. a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere $a^2 = 24 \cdot b$ ise a + b toplamının <u>en az</u> kaç olacağını bulunuz.

C. Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

20. a, b, c, d tam sayı olmak üzere $\frac{2a+b}{c+d} = 4$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) a bir çift sayıdır.
B) c bir tek sayıdır.
C) b bir çift sayıdır.
D) $a \cdot d$ sayısı tek sayıdır.
E) c + d toplamı bir tek sayıdır.

21. x bir irrasyonel sayıdır.
Buna göre,
I. x^2 sayısı bir irrasyonel sayıdır.
II. $5 \cdot x$ sayısı bir irrasyonel sayıdır.
III. x + 2 sayısı bir rasyonel sayıdır.
ifadelerinden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) Yalnız I B)Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

22. a, b ve c sayıları birer asal sayıdır.
Buna göre,
I. a + b = c
II. b − c = 1
III. $\frac{17}{a} \in \mathbb{Z} \left(a \neq 17\right)$
ifadelerinden hangileri doğru <u>olabilir</u>?

A) Yalnız I B)Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

23. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) 0 (sıfır) pozitif olmayan bir doğal sayıdır.

B) $\frac{2}{3}$ rasyonel sayıdır.

C) $\sqrt{2}$ rasyonel olmayan bir sayıdır.

D) $\frac{5}{2}$ irrasyonel sayıdır.

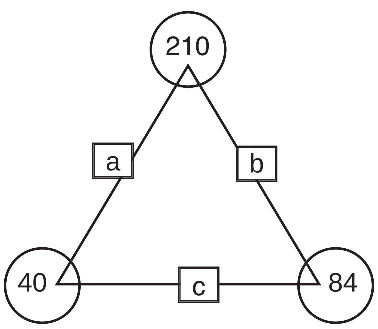
E) -3 tam sayıdır.

24. abc ve cba sayıları üç basamaklı sayılardır. **Buna göre abc – cba farkı aşağıdakilerden hangisi ile kesinlikle tam bölünmez?**

A) 33 B) 27 C) 18 D) 13 E) 3

D. 25. ve 26. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

a, b, c $\in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere aşağıdaki üçgen üzerinde daire ve kareler verilmiştir. Her dairenin içindeki sayı, kendisine komşu olan iki kare içindeki sayıların çarpımına eşittir.



25. Verilenlere göre c sayısını bulunuz.

26. a + b + c toplamının sonucunu bulunuz.

E. 27. ve 28. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Aşağıdaki tablonun ilk 100 satırı aşağıda verilen kurallara göre mavi, kırmızı ve yeşil renkte boyanmıştır.

- 2 ile bölünebilen sayıların bulunduğu alanlar mavi ile boyanmıştır.
- 3 ile bölünebilen sayıların bulunduğu alanlar kırmızı ile boyanmıştır.
- 5 ile bölünebilen sayıların bulunduğu alanlar yeşil ile boyanmıştır.

	2	3	5
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
.			
.			
.			
100			

27. Kaç satırın üç renk ile boyandığını bulunuz.

28. Kaç satırın sadece mavi ve kırmızı ile boyandığını bulunuz.

Cevap Anahtarı														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
	Çift	Aralarında asal sayılar	Ardışık sayılar	Asal sayı	72	23	6	41	125	33	27	57	21	10
	15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
	90	27	A	6	18	C	B	D	D	D	25	35	3	13



GEOMETRİ

ÜÇGENLER

2. 1. Dik Üçgen
2. 1. 1. Dik Üçgenler ile İlgili Problemler
2. 1. 2. Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar ile İlgili Problemler
2. 1. 3. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler

2. ÜÇGENLER

Eski Mısırlılar döneminde Nil Nehri'nin taşmasıyla arazi sınırlarının bozulması ve bu arazileri yeniden paylaştırma ihtiyacının doğması sonucu yapılan çalışmaların geometriyi geliştirdiği düşünülmektedir. Bu ve benzeri problemleri çözmek için doğan geometri, giderek daha soyut bir hâl almış ve kavramlaşmaya başlamıştır.

Geometri alanında ilk kapsamlı çalışmayı yapan ve bunu sistematik bir şekilde ortaya koyan Öklid'dir. Öklid, aksiyomlarını ve ispatlarını "Elementler" adını verdiği eserinde toplamıştır. Aksiyomları, günümüzde de geçerliliğini korumaktadır.

Geometrik bir kavram olan üçgenlerin fen bilimlerinin yanı sıra günlük hayatta birçok alanda yeri vardır. Mimaride, inşaat mühendisliğinde ve adli tıpta kulllanılmaktadır.

Geometrinin bir konusu olan trigonometri; arazi ölçümlerinde, haritacılıkta, GPS uydu sistemlerinde, bir kıtanın haritasının çıkarılmasında önem taşır. Engebeli arazilerde mesafe ölçümünde nirengi (üçgenlere ayırma) ile hesaplama yaparken trigonometri kullanılır.

Bu bölümde dik üçgenler, dik üçgende trigonometrik oranlar ve üçgenlerin benzerliği temel bir yaklaşım ile ele alınacaktır.



Neler Öğreneceksiniz?

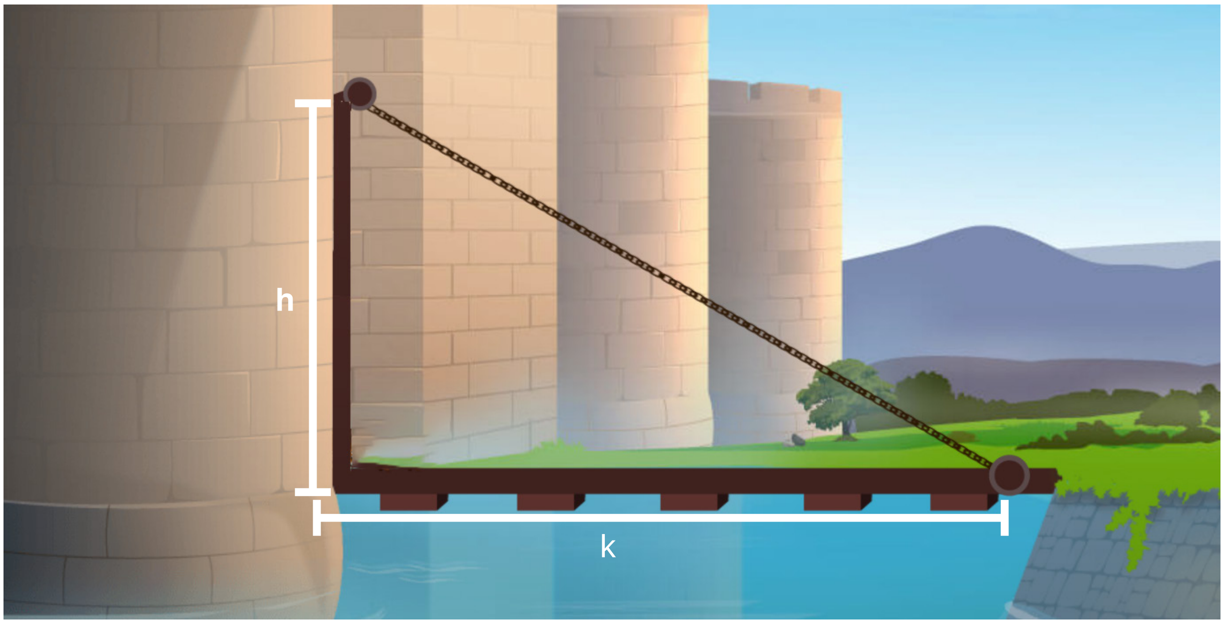
Bu ünitede;
- Dik üçgeni ve özelliklerini,
- Dik üçgenlerle ilgili gerçek hayat problemlerini çözmeyi,
- Dik üçgende trigonometrik oranları,
- Üçgenlerin benzerliğini,
- Üçgenlerin benzerliğiyle ilgili gerçek hayat problemlerini çözmeyi öğreneceksiniz.

Bu Konu Neden Önemli?

- Üçgenler konusu, geometrinin temel konularından biridir.
- Geometri problemlerinin çözümünde trigonometrik oranlar önemli bir yere sahiptir.
- Dik üçgendeki bağıntılar, geometrinin diğer alanlarında da sıklıkla kullanılır.
- Üçgenlerin benzerlik bağıntıları, çokgen ve çember konularında da kullanılır.
- Gerçek hayat problemlerinin önemli bir kısmı dik üçgen, trigonometrik oranlar ve benzerlik yardımı ile çözülebilir.

2.1. Dik Üçgen

Hazırlık Çalışması



Yukarıdaki görselde nehir kenarına kurulan bir kalenin açılıp kapanabilen ve açıldığında köprü görevi gören kapısı görülmektedir. Kale kapısının açılıp kapanmasını sağlayan mekanizma, zincir ile köprü ucuna bağlıdır. Köprü uzunluğu k metre ve duvardaki makaranın köprüye uzaklığı h metredir.

Zincirin uzunluğunu ölçme şansı olmadığı varsayımından yola çıkarak h ve k değerleri ile zincirin uzunluğu bulunabilir mi? Arkadaşlarınızla tartışarak bulduğunuz çözümleri paylaşınız.



Görsel 2.1: Selimiye Camisi



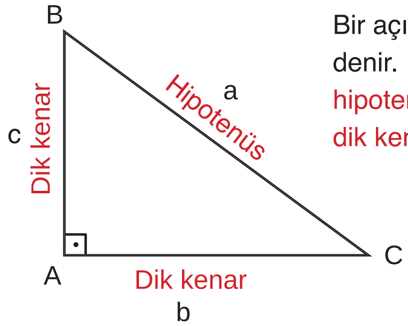
Görsel 2.2: Selimiye Camisi'nin Miniatürk'teki maketi

Yukarıda Selimiye Camisi'nin görseli ve Miniatürk'teki $\frac{1}{25}$ oranında küçültülmüş maketinin görseli verilmiştir. Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlamaya çalışınız.

- Selimiye Camisi'nin bazı bölümleri farklı oranlarda küçültülerek maketi oluşturulsaydı maket ile Selimiye Camisi arasında benzerlik sağlanabilir miydi?
- Maketin aslına göre $\frac{1}{25}$ oranında küçültülmesi sizce ne ifade etmektedir?

2.1.1. Dik Üçgenler ile İlgili Problemler

Dik Üçgen



Bir açısı 90° olan üçgene dik üçgen denir. 90° nin karşısındaki kenara hipotenüs, diğer kenarlara dik kenarlar denir.

Terimler ve Kavramlar

Dik üçgen, dik kenarlar, hipotenüs, Pisagor teoremi, Öklid teoremi

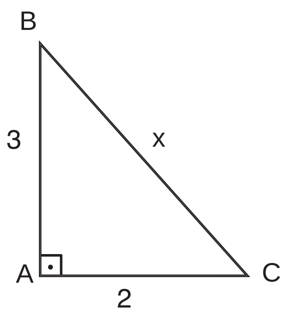
Semboller ve Gösterimler

$\perp$	: Dik
$[AB]$	: AB doğru parçası
$\lvert AB \rvert$	: AB doğru parçasının uzunluğu
$\widehat{C}$	: C açısı
$m(\widehat{C})$	: C açısının ölçüsü
$\overset{\frown}{ABC}$	: ABC üçgeni

Pisagor Teoremi

Bir dik üçgenin dik kenar uzunlukları b ve c birim, hipotenüs uzunluğu a birim olmak üzere $a^2 = b^2 + c^2$ olur.

1. ÖRNEK



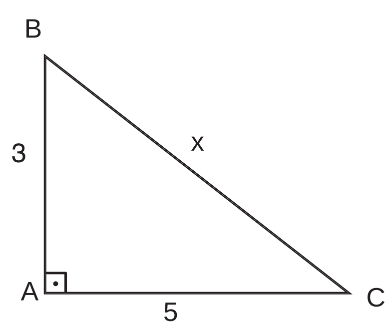
Şekilde verilen BAC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve
$|BA| = 3$ cm
$|AC| = 2$ cm olduğuna göre
$|BC| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

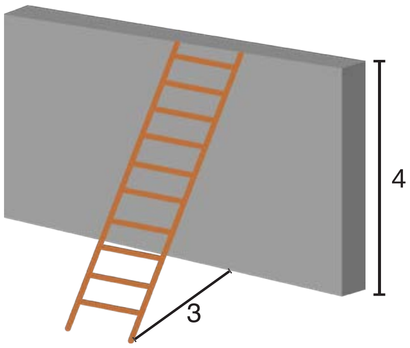
Verilen dik üçgende Pisagor teoreminden
$x^2 = 3^2 + 2^2$ olacağından
$x^2 = 13$
$x = \sqrt{13}$ cm bulunur.

1 SIRA SİZDE

Şekilde verilen BAC dik üçgeninde $[BA] \perp [AC]$ olmak üzere
$|BA| = 3$ cm
$|AC| = 5$ cm olduğuna göre
$|BC| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.



2. ÖRNEK



Yandaki görselde yüksekliği 4 m olan duvar ve bir merdiven verilmiştir. Merdiven, duvarın üstüyle aynı hizada olacak şekilde duvara dayanmıştır. Merdivenin alt uçlarının duvara uzaklığı 3 m dir. Duvar, zemine dik konumda olduğuna göre merdivenin uzunluğunun kaç m olduğunu bulunuz.

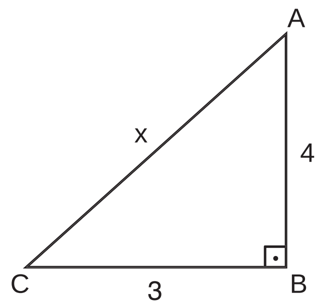
ÇÖZÜM

Verilenler ile bir üçgen oluşturulursa yandaki ABC dik üçgeni elde edilir. Bu üçgenin hipotenüs uzunluğu olan x in değeri merdivenin uzunluğunu verir. Buna göre Pisagor teoremi yardımı ile

$x^2 = 3^2 + 4^2$

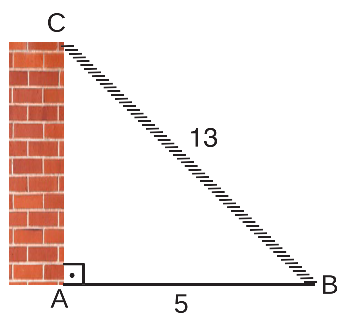
$x^2 = 25$

$x = 5$ m bulunur.



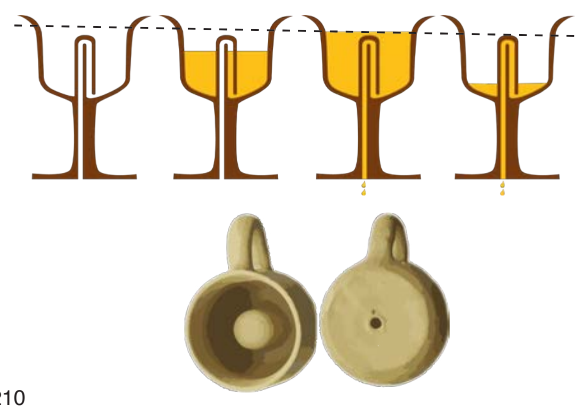
2 SIRA SİZDE

Şekilde verilen 13 metre uzunluğundaki bir merdiven, düz duvarın uç kısmına C noktasına değecek şekilde dayanmıştır. |AB| = 5 m olduğuna göre duvarın yüksekliğinin kaç m olduğunu bulunuz.



BİLİYOR MUYDUNUZ?

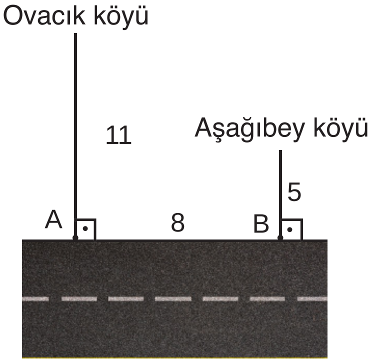
Pisagor, ilginç bir özelliğe sahip olan ters çan biçiminde bir kupa tasarlamıştır (Görsel 2.3). Bu kupanın altı deliktir. Buna rağmen içindekiler dökülmez ta ki kupanın sınır çizgisi aşılana kadar. İçindeki sıvı, sınır çizgisini aşınca bütün sıvı akıp gider. Bu kupaya “Adalet Kupası” adını veren filozof, belki de bu kupa ile “Sahip olduklarınızla yetinmeyi bilmelisiniz zira daha fazlasını arzularken sahip olduklarınız da elden gidebilir.” demek istemiştir.



Görsel 2.3: Adalet kupası

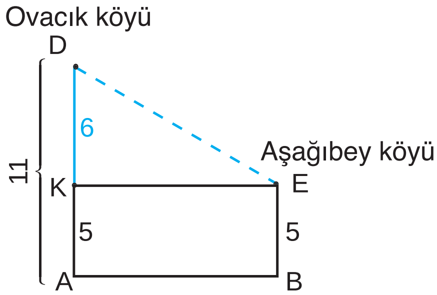
Kaynak: http://etkinlik.aydin.edu.tr/haber_detay.asp?haberID=3210

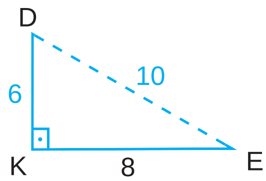
3. ÖRNEK



Yandaki şekilde düz bir otoyoldaki A ile B noktalarına uzaklıkları 11 km ve 5 km olan Ovacık ve Aşağıbey köyleri arasında yol yapılacaktır. |AB| = 8 km olduğuna göre yapılacak yolun en kısa uzunluğunun kaç km olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM





Ovacık ve Aşağıbey köylerinin bulunduğu noktalar sırası ile D, E olmak üzere şekilde oluşan DKE dik üçgeni ve ABEK dikdörtgeni yardımı ile $|DK| = 11 - 5 = 6$ olacağından

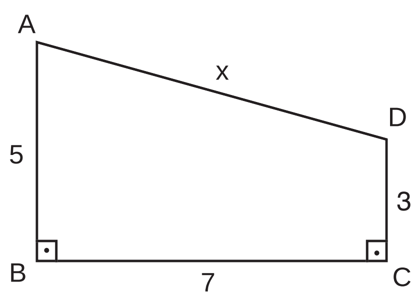
$|DE|^2 = 6^2 + 8^2$

$|DE|^2 = 100$

$|DE| = 10$ km bulunur.

3 SIRA SİZDE

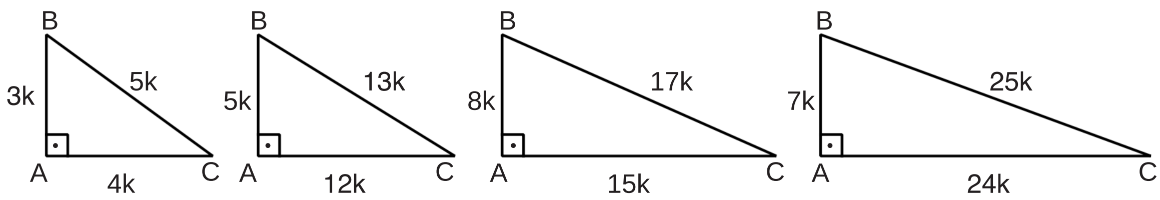
Yanda ABCD dörtgeni verilmiştir. |AB| = 5 cm, |BC| = 7 cm ve |CD| = 3 cm dir.
$[AB] \perp [BC]$ ve $[BC] \perp [CD]$ olduğuna göre |AD| = x in kaç cm olduğunu bulunuz.



Kenar Uzunlukları Tam Sayı Olan Bazı Dik Üçgenler

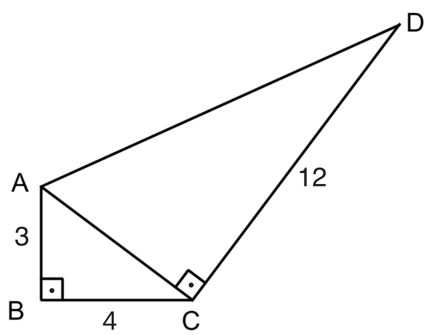
Pisagor teoremi yardımıyla dik üçgenlerin kenar uzunlukları hesaplanabilir. Ancak kenar uzunlukları tam sayı olan dik üçgenleri bilmek, problem çözümünde zaman kazandırır. Bu üçgenlerden en sık kullanılanı 3-4-5 dik üçgenidir. 3-4-5 dik üçgeninin kenar uzunluklarının reel sayı katları da dik üçgen belirtir. Burada kenar uzunluklarından herhangi ikisi verildiğinde üçüncü kenarı belli olur. Örneğin bir dik kenarı 3 birim, hipotenüsü 5 birim olan dik üçgenin diğer dik kenarı 4 birimdir. Kenar uzunlukları tam sayı olan bu üçgenin kenar uzunluklarının tam sayı katları da kenar uzunlukları tam sayı olan dik üçgenlerdir. Örneğin 6-8-10 üçgeni, 9-12-15 üçgeni gibi örnekler artırılabilir.

Aşağıda kenarları tam sayı olan bazı dik üçgenler verilmiştir. Burada uzunlukların birim olarak (milimetre, santimetre, metre, kilometre vb.) düşünülmesi faydalı olacaktır.



k = 1 ise	3-4-5 üçgeni	5-12-13 üçgeni	8-15-17 üçgeni	7-24-25 üçgeni
k = 2 ise	6-8-10 üçgeni	10-24-26 üçgeni	16-30-34 üçgeni	14-48-50 üçgeni
k = 3 ise	9-12-15 üçgeni	15-36-39 üçgeni	24-45-51 üçgeni	21-72-75 üçgeni
...	...	...	...	...

4. ÖRNEK



Şekilde ABC ve ACD dik üçgenler olmak üzere

$[DC] \perp [CA]$ ve $[AB] \perp [BC]$

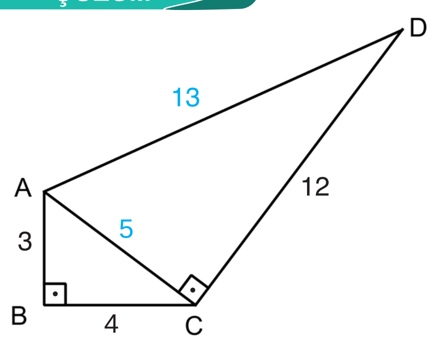
|AB| = 3 cm

|BC| = 4 cm

|DC| = 12 cm

ise |AD| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeni 3-4-5 dik üçgeni olacağından
|AC| = 5 cm dir.

ACD üçgeni 5-12-13 dik üçgeni olacağından
|AD| = 13 cm dir.

4 SIRA SİZDE

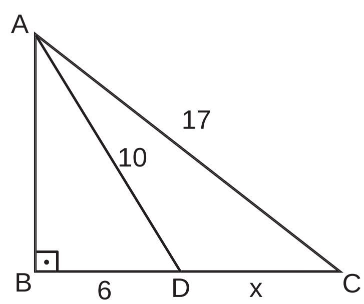
Şekilde verilen ABC dik üçgeninde $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ve

|BD| = 6 cm

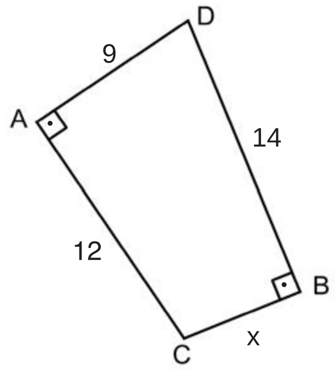
|AD| = 10 cm

|AC| = 17 cm

olduğuna göre |DC| = x in kaç cm olduğunu bulunuz.



5. ÖRNEK



Şekilde verilen ADBC dörtgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olmak üzere

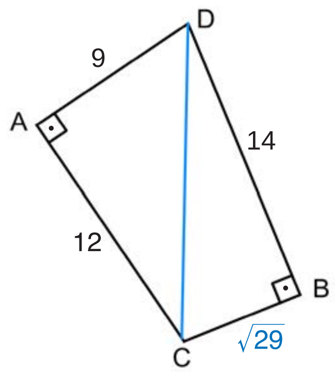
$|BD| = 14$ cm

$|AD| = 9$ cm

$|AC| = 12$ cm olduğuna göre

$|BC| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilen şekilde [DC] çizilirse hipotenüsü ortak olan DAC ve DBC dik üçgenleri elde edilir. Pisagor teoreminden

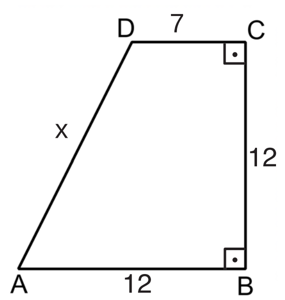
$|DC|^2 = 9^2 + 12^2$ ve $|DC|^2 = 14^2 + x^2$ olacağından

$x^2 + 196 = 225$

$x^2 = 29$

$x = \sqrt{29}$ cm bulunur.

6. ÖRNEK



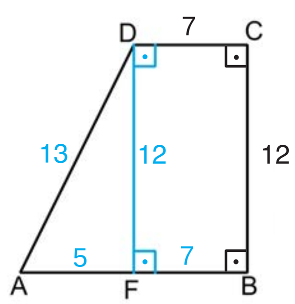
Şekilde verilen ABCD dörtgeninde $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 90^\circ$ olmak üzere

$|AB| = |BC| = 12$ cm

$|DC| = 7$ cm olduğuna göre

$|AD| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[DF] \perp [AB]$ olacak şekilde $[DF]$ çizilirse DFBC dikdörtgen olacağından

$|DC| = |FB| = 7$ cm ve

$|BC| = |DF| = 12$ cm olur.

Ayrıca $|AF| = 12 - 7 = 5$ cm bulunur.

AFD üçgeni 5-12-13 dik üçgeni olacağından

$|AD| = x = 13$ cm bulunur.

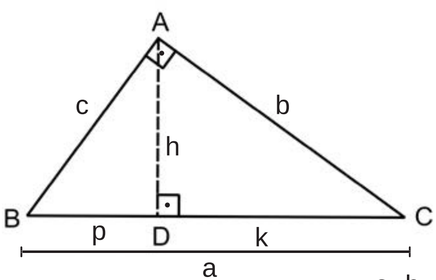
5 **SIRA SİZDE**

Bir halk otobüsündeki engelli rampasının uzunluğu 50 cm, kaldırımın yerden yüksekliği 30 cm dir. Engelli rampasının otobüse bağlı olduğu noktanın yerden yüksekliği de 44 cm dir. Buna göre engelli rampasının ucu kaldırımda olacak şekilde şoförlerin duraklara <u>en az</u> kaç cm yaklaşması gerektiğini bulunuz.



Dik Üçgende Öklid Teoremi

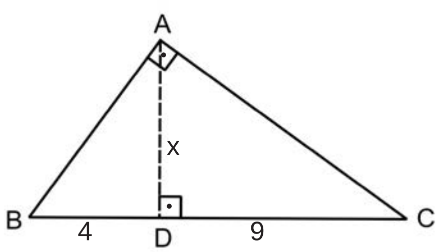
Bir dik üçgende dik açının bulunduğu köşeden hipotenüse dikme indirilirse aşağıdaki eşitlikler geçerli olur.



b, c, a bulundukları kenarların uzunlukları ve
|AD| = h, ICDI = k, |DB| = p olmak üzere
1) $h^2 = p$ □ k
2) $c^2 = p$ □ a
3) $b^2 = k$ □ a olur.
Bu eşitlikler Öklid teoreminin sonuçları olan bağıntılardır.

Ayrıca BAC dik üçgeninin alanı $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$ olduğundan BAC dik üçgeninde a □ h = b □ c eşitliği de sağlanır.

7. ÖRNEK

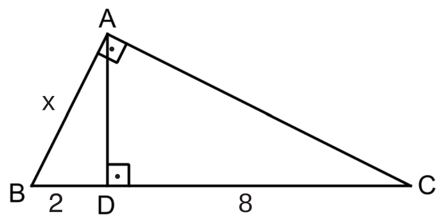


Şekilde verilen BAC dik üçgeninde
$m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve $[AD] \perp [BC]$ olmak üzere
$|BD| = 4$ cm
$|DC| = 9$ cm olduğuna göre
|AD| = x in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

BAC dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa
$x^2 = 4 \cdot 9$ olacağından
$x^2 = 36$
$x = 6$ cm bulunur.

8. ÖRNEK

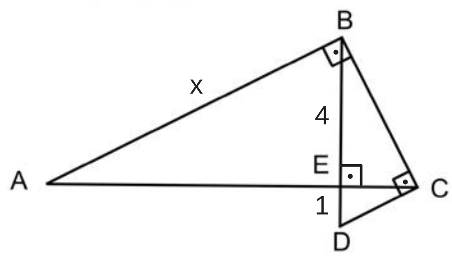


Şekilde verilen BAC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve $[AD] \perp [BC]$ olmak üzere
$|BD| = 2$ cm
$|DC| = 8$ cm olduğuna göre
$|AB| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Öklid teoreminden
$x^2 = 2 \cdot (2 + 8)$ olacağından
$x^2 = 20$
$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm bulunur.

9. ÖRNEK

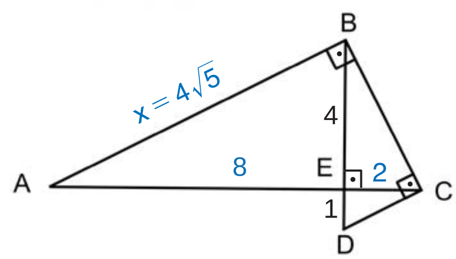


Şekilde verilen ABC ve DCB dik üçgenlerinde
$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$, $m(\widehat{DCB}) = 90^\circ$ ve $[BD] \perp [AC]$
olmak üzere
$|BE| = 4$ cm, $|ED| = 1$ cm olduğuna göre
$|BA| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

DCB dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa
$|EC|^2 = 1 \cdot 4 = 4$
$|EC| = 2$ cm bulunur.

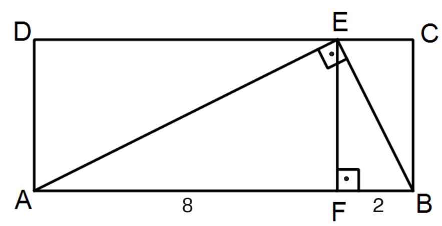
ABC dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa
$4^2 = |EC| \cdot |AE|$
$16 = 2 \cdot |AE|$
$|AE| = 8$ cm bulunur.



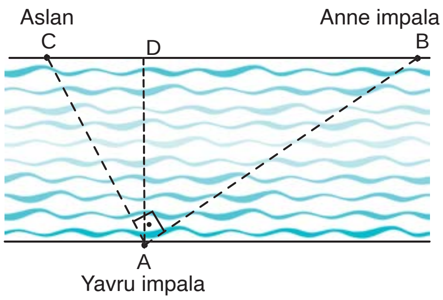
ABC dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa
$x^2 = 8 \cdot (8 + 2) = 80$
$x = \sqrt{80}$
$x = 4\sqrt{5}$ cm bulunur.

6 SIRA SİZDE

Şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde
$m(\widehat{AEB}) = 90^\circ$ ve $[EF] \perp [AB]$ olmak üzere
$|AF| = 8$ cm
$|FB| = 2$ cm dir.
Buna göre ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



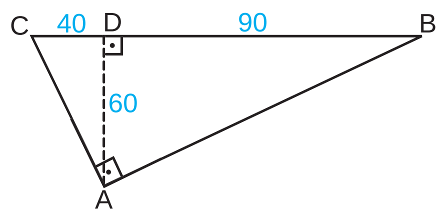
10. ÖRNEK



Bir göç sırasında nehir kıyısının A noktasından karşıya geçmek isteyen anne ve yavru impalalardan anne impala, B noktasına varıp yavrusunu beklemektedir. Aynı zamanda bir aslan, C noktasında yavru impalayı avlamak için pusu kurmuştur. Yavru impala, karşı kıyıda A noktasına en yakın nokta olan D noktasına ulaştığı anda aslan harekete geçmektedir. Durumu fark eden yavru impala, kıyıya paralel bir şekilde koşarak annesinin bulunduğu B noktasına aslan ile aynı anda ulaşıp son anda kurtulmaktadır. (Kıyı şeritleri düz ve paraleldir.)
Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Aslanın aldığı yol 130 m, yavru impalanın kıyıya ulaştıktan sonra aldığı yol 90 m ve $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ$ olduğuna göre nehrin genişliğinin kaç m olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

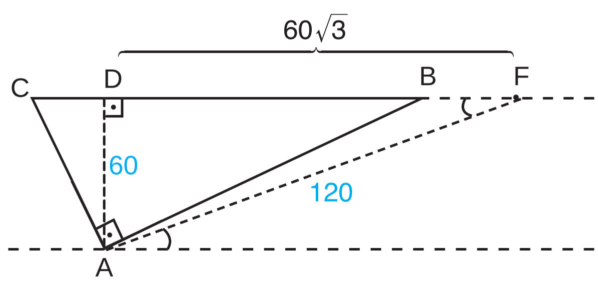


A noktasına en yakın nokta, D noktası olduğundan $[AD] \perp [CB]$ olur. Aslanın aldığı yoldan yavru impalanın aldığı yol çıkarılırsa $|CD|$ bulunur. $|DB| = 90$ m olduğundan
$|CD| = 130 - 90 = 40$ m olur.

Verilen bilgiler ve Öklid teoremi yardımı ile
$|AD|^2 = 40 \cdot 90 = 3600$
$|AD| = \sqrt{3600}$ ise $|AD| = 60$ m bulunur.

b) Yavru impala, A noktasından doğrusal bir yol alarak B noktasının sağında $|DF| = 60\sqrt{3}$ m olacak şekilde bir F noktasına varsaydı nehir içinde kaç m yol almış olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

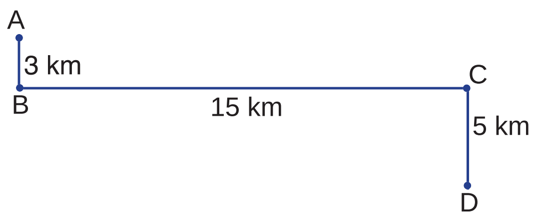


Yavru impalanın aldığı yolun uzunluğu ($|AF|$), ADF dik üçgeninin hipotenüs uzunluğudur.
$|DF| = 60\sqrt{3}$ m ve $|AD| = 60$ m olmak üzere ADF dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa
$|AF|^2 = 60^2 + (60\sqrt{3})^2$
$|AF|^2 = 14\,400$
$|AF| = 120$ m bulunur.

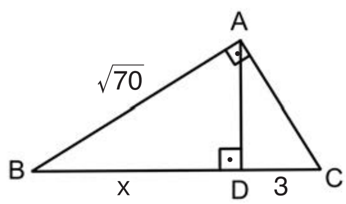
Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	$\sqrt{34}$	12	$\sqrt{53}$	9	48	28

Alıştırmalar

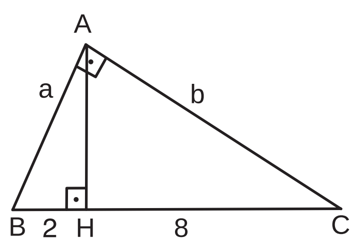
1. Aşağıdaki şekilde A noktasında bulunan bir hastanede, bir organ bağışı gerçekleşmiştir. Bağışlanan organlar, D noktasındaki başka bir hastaneye gönderilecektir. İki nokta arasındaki kara yolları hakkında bilgiler
$[AB] \perp [BC]$, $[BC] \perp [CD]$
$|AB| = 3$ km, $|BC| = 15$ km
ve $|CD| = 5$ km şeklinde verilmiştir.
Nakil, helikopter ile yapılacaktır. Helikopterin alacağı yolun <u>en az</u> kaç km olduğunu bulunuz.



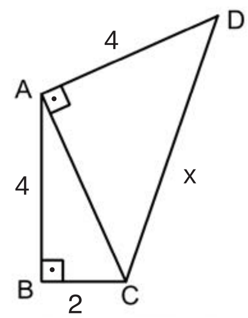
2. Yanda ABC bir dik üçgen
$[BA] \perp [AC]$
$[BC] \perp [AD]$
$|AB| = \sqrt{70}$ cm
$|DC| = 3$ cm
olmak üzere
$|BD| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.



3. Aşağıda ABC dik üçgeni verilmiştir.
$[AB] \perp [AC]$, $[AH] \perp [BC]$
$|BH| = 2$ cm, $|HC| = 8$ cm
$|AB| = a$, $|AC| = b$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımının değerini bulunuz.



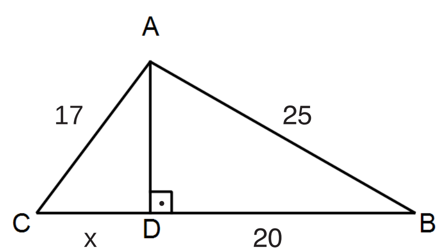
4. Aşağıdaki şekilde ABC ve CAD dik üçgenler olmak üzere



$[AB] \perp [BC]$,
$[AD] \perp [AC]$,
$|AB| = |AD| = 4$ cm
$|BC| = 2$ cm
$|DC| = x$
olduğuna göre x in kaç cm olduğunu bulunuz.

5. Kenar uzunlukları cm cinsinden iki basamaklı birer tam sayı olan bir dik üçgenin dik kenarlarının oranı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre bu üçgenin çevresinin <u>en çok</u> kaç cm olabileceğini bulunuz.

6. Aşağıda bir ABC üçgeni verilmiştir.
$[AD] \perp [CB]$, $|DB| = 20$ cm, $|BA| = 25$ cm ve $|AC| = 17$ cm olmak üzere $|CD| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.



Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	17	7	40	6	228	8

2.1.2. Dik Üçgende Trigonometrik Oranlarla İlgili Problemler

Dik Üçgende Trigonometrik Oranlar

Dik açılı bir üçgende, bu üçgene ait kenarların oranı ile açılar arasında ilişkiler bulunmaktadır. Bu ilişkilere trigonometrik oranlar denir. Bu oranlar, trigonometride; sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant olarak adlandırılır.

- Dik üçgende bir dar açının sinüs değeri, açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranıdır. Bir x açısının sinüsü kısaca $\sin x$ ile gösterilir.
- Dik üçgende bir dar açının kosinüs değeri, açıya komşu olan dik kenar uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranıdır. Bir x açısının kosinüsü kısaca $\cos x$ ile gösterilir.
- Dik üçgende bir dar açının tanjant değeri, açının karşısında bulunan dik kenar uzunluğunun açıya komşu olan dik kenar uzunluğuna oranıdır. Bir x açısının tanjantı kısaca $\tan x$ ile gösterilir.
- Dik üçgende bir dar açının kotanjant değeri, açıya komşu olan dik kenar uzunluğunun açının karşısında bulunan dik kenar uzunluğuna oranıdır. Bir x açısının kotanjantı kısaca $\cot x$ ile gösterilir.

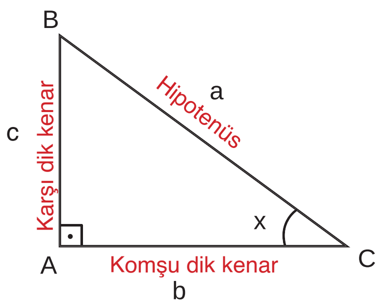
Terimler ve Kavramlar

Trigonometrik oran, sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant

Semboller ve Gösterimler

sinx : x açısının sinüsü
cosx : x açısının kosinüsü
tanx : x açısının tanjantı
cotx : x açısının kotanjantı

a, b, c bulunduğu kenarların uzunlukları olmak üzere bir dik üçgende verilen $m(\widehat{ACB}) = x$ açısı için trigonometrik oranlar aşağıdaki gibidir.



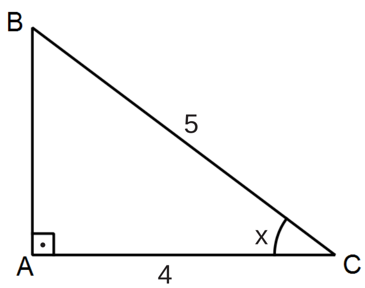
$$\sin x = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos x = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

$$\tan x = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\cot x = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

1. ÖRNEK



Şekilde verilen CAB dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve
$m(\widehat{ACB}) = x$ olmak üzere
$|AC| = 4$ cm
$|CB| = 5$ cm olduğuna göre
$\sin x + \cos x$ değerini bulunuz.

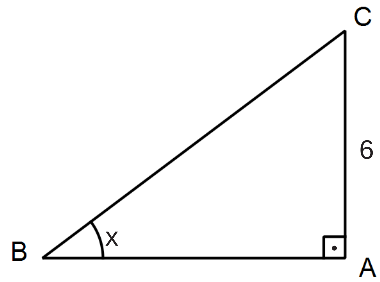
ÇÖZÜM

CAB dik üçgeni 3-4-5 dik üçgeni olduğundan $|AB| = 3$ cm olur. $\sin x = \frac{3}{5}$ ve $\cos x = \frac{4}{5}$ olduğundan

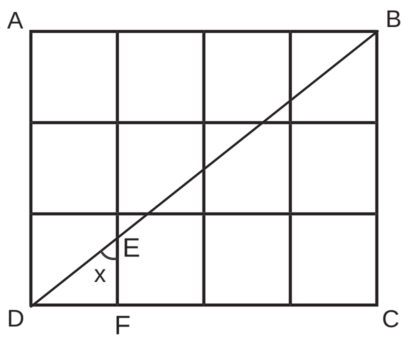
$\sin x + \cos x = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$ bulunur.

1 SIRA SİZDE

Şekilde verilen BAC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $|AC| = 6$ cm ve $\tan x = \frac{3}{4}$ olduğuna göre BAC dik üçgeninin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.



2. ÖRNEK

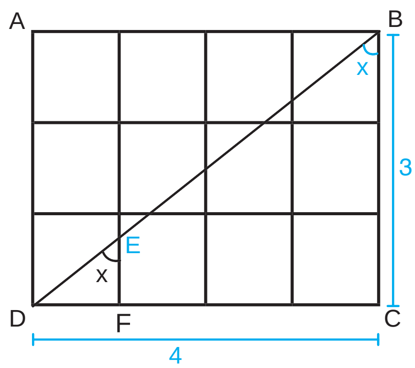


Şekilde eş birim karelerden oluşmuş ABCD dikdörtgeni içerisinde $m(\widehat{DEF}) = x$ açısı ve [DB] köşegeni verilmiştir. Buna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{DEF}$ ile $\widehat{DBC}$ yöndeş açılar olduğundan $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{DBC}) = x$ olur.

ABCD dikdörtgeninde $|DC| = 4$ birim ve $|CB| = 3$ birim olduğundan $\tan x = \frac{4}{3}$ bulunur.



MATEMATİKTE İZ BIRAKANLAR

El Battani (858–929)

Dünyanın ilk üniversitesinin kurulduğu Harran'da doğmuştur. Astronomi alanındaki çalışmalarda matematik ve geometrinin kullanılmasına öncü olmuştur.

Cebir ilmini, trigonometriye uygulayan ilk bilim insanıdır. Sinüs, kosinüs ve kotanjant kavramlarını geliştirerek dereceli bir tablo oluşturmuştur. Bu tabloyu, güneş saati hesaplamalarında da kullanmıştır.

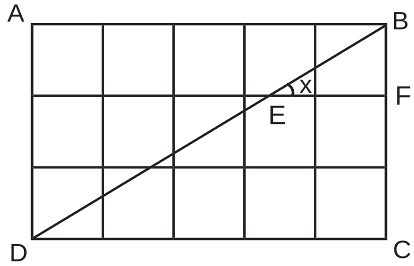
Batı dünyası, o dönemde trigonometriyi Battani'nin eserlerinden öğrenmiştir, denilebilir.

Modern dünya, Battani'nin bilim dünyasına olan katkılarından dolayı Ay'daki bir bölgeye Albategnius (Albetenyus, El Battani) ismini vermiştir.

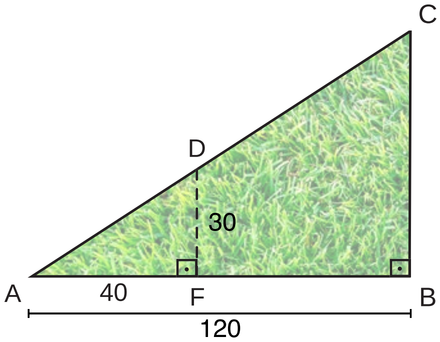
Kaynak: http://www.eba.gov.tr/video/izle/92419182d55fe4c7d4f89a8b3aa1e1f5c6150295c2005

2 SIRA SİZDE

Şekilde eş birim karelerden oluşmuş ABCD dikdörtgeni içerisinde $m(\widehat{BEF}) = x$ açısı verilmiştir. Buna göre $\cot x$ değerini bulunuz.



3. ÖRNEK



Akıllı telefonunda uzunluk ölçen bir programı fark eden Sakine, bu program yardımı ile dik üçgen şeklindeki tarlalarının çevre uzunluğunu bulmak istemektedir. $[DF] \perp [AB]$, $[CB] \parallel [DF]$ olmak üzere Sakine, |FA| = 40 m, |FD| = 30 m ve IABI = 120 m olarak ölçmüştür. Sakine'nin, başka bir ölçme yapmadan tarlanın çevresini kaç metre olarak hesaplayabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

AFD ve ABC dik üçgenlerinde x açısının tanjantı aynı olacaktır.

AFD dik üçgeninde $\tan x = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ bulunur.

ABC dik üçgeninde $\tan x = \frac{|CB|}{120}$ olduğundan $\frac{3}{4} = \frac{|CB|}{120}$ olur.

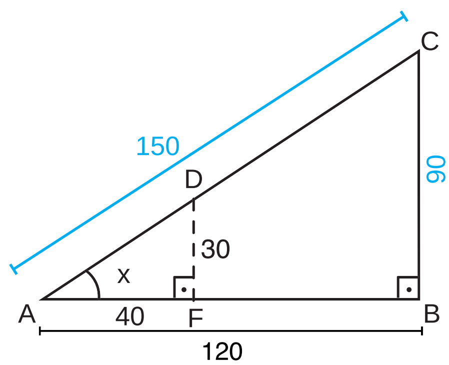
Burada içler dışlar çarpımı yapılırsa

$3 \cdot 120 = 4 \cdot |CB|$ olacağından $|CB| = 90$ m olur.

ABC dik üçgeni 3-4-5 üçgeninin 30 katı olan

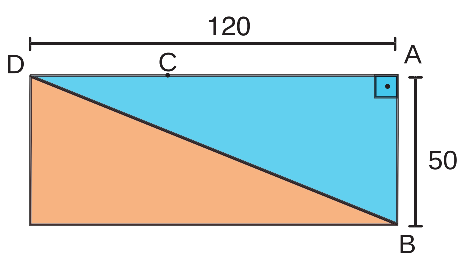
90-120-150 dik üçgeni olacağından IACI = 150 m olur.

Sonuç olarak tarlanın çevresi 90 + 120 + 150 = 360 m bulunur.



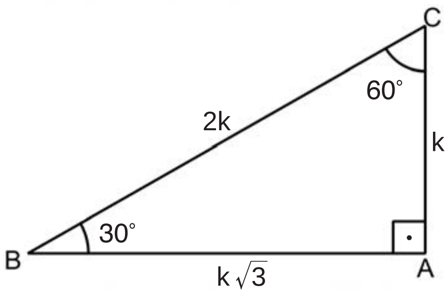
3 SIRA SİZDE

Bir denizde sahilden itibaren su derinliği şekildeki gibi dik üçgen oluşturacak biçimde doğrusal olarak artmaktadır. D noktasına uzaklığı 120 m olan A noktasında derinlik 50 m olarak ölçülmektedir. Buna göre A noktasının 80 m solunda bulunan C noktasındaki derinliğin kaç m olduğunu bulunuz.



30° - 60° - 90° Dik Üçgeninde Trigonometrik Oranlar

Açıları 30° - 60° - 90° olan dik üçgende 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir. 60° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu, 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katına eşittir. Buna göre 30° ve 60° lik açıların trigonometrik oranları aşağıdaki gibidir.



$\sin 30^\circ = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 30^\circ = \frac{k\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3}$

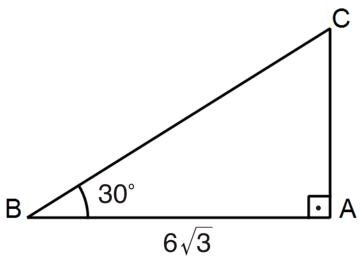
$\sin 60^\circ = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \frac{k\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3}$

$\cot 60^\circ = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

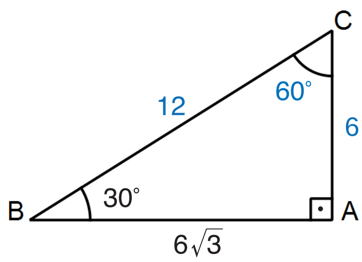
4. ÖRNEK



Şekilde verilen BAC dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$, $|BA| = 6\sqrt{3}$ cm ve $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ olduğuna göre $|AC| + |CB|$ toplamın kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{C}) = 60^\circ$ bulunur. 60° lik açının karşısındaki kenarın uzunluğu $6\sqrt{3}$ cm olduğundan 30° lik açının karşısınndaki kenarın uzunluğu 6 cm olmalıdır. Hipotenüs uzunluğu, 30° lik açının karşısındaki kenarın uzunluğunun 2 katı olacağından $|BC| = 12$ cm olur. Buradan $|AC| + |CB| = 6 + 12 = 18$ cm bulunur.



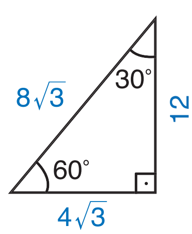
5. ÖRNEK

Yandaki görselde bir itfaiye aracı, çıkan bir yangında çatı katındakileri kurtarmak için binanın en uç noktasına merdiven yaslamıştır. Aracın yerden yüksekliği 3 m, binanın yüksekliği 15 m ve merdivenin aracın üst kısmı ile yaptığı açı 60° olduğuna göre itfaiye merdiveninin uzunluğunun kaç m olduğunu bulunuz.



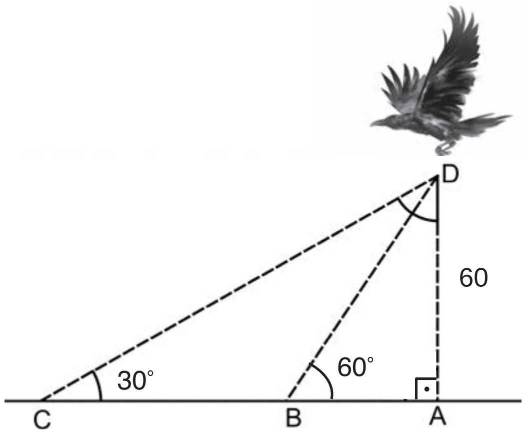
ÇÖZÜM

Şekilde oluşan dik üçgende, merdivenin aracın üstünden binanın üstüne kadar olan yüksekliği $15 - 3 = 12$ m olur.
60° nin karşısı 12 m ise 30° nin karşısı $4\sqrt{3}$ m olacağından hipotenüs uzunluğu $8\sqrt{3}$ m olur. Dolayısıyla merdivenin uzunluğu $8\sqrt{3}$ m bulunur.



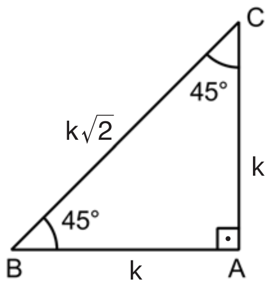
4 SIRA SİZDE

Bir karga, yerde bulduğu iki cevizi kırmak için yerden 60 metre yükseklikte uçarken cevizleri bırakmaktadır. Birinci ceviz şekildeki [DB] yolunu izleyerek B noktasına, ikinci ceviz [DC] yolunu izleyerek C noktasına şekilde verilen açılar ile düştüğüne göre |BC| nun kaç metre olduğunu bulunuz.



45° - 45° - 90° Dik Üçgeninde Trigonometrik Oranlar

Dik kenar uzunlukları eşit olan dik üçgene ikizkenar dik üçgen denir. Hipotenüs uzunluğu, ikizkenar uzunluklarının $\sqrt{2}$ katına eşittir. Buna göre 45° nin trigonometrik oranları aşağıdaki gibidir.



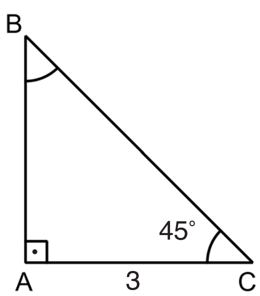
$\sin 45^\circ = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{k}{k\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45^\circ = \dfrac{k}{k} = 1$

$\cot 45^\circ = \dfrac{k}{k} = 1$

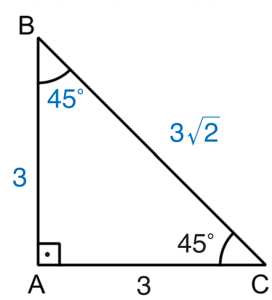
6. ÖRNEK



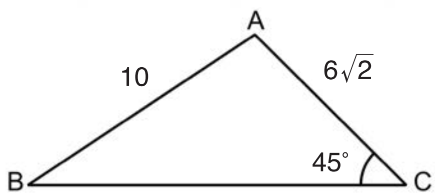
Şekilde verilen CAB dik üçgeninde $[AB] \perp [AC]$ ve $|AC| = 3$ cm olduğuna göre $|BC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

CAB ikizkenar dik üçgen olacağından
|AB| = 3 cm bulunur.
Ayrıca $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ dik üçgeninde hipotenüs uzunluğu, dik kenar uzunluklarının $\sqrt{2}$ katı olacağından
$|BC| = 3\sqrt{2}$ cm bulunur.



7. ÖRNEK



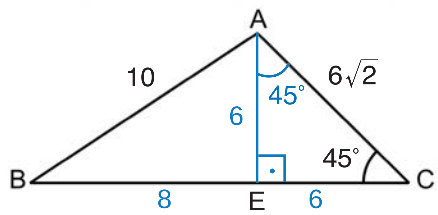
Şekilde verilen BAC üçgeninde $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ve IABI = 10 cm, IACI = $6\sqrt{2}$ cm olduğuna göre IBCI nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

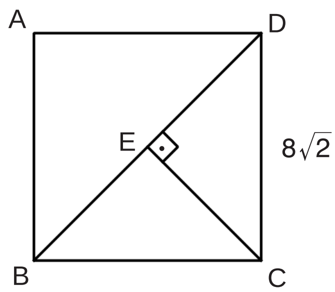
$[AE] \perp [BC]$ olacak şekilde $[AE]$ çizilirse AEC ikizkenar dik üçgen olur. |AC| = $6\sqrt{2}$ cm olduğundan
|AE| = |EC| = 6 cm bulunur.

AEB 6-8-10 dik üçgeni olacağından IBEI = 8 cm bulunur.

|BC| = |BE| + |EC| = 8 + 6 = 14 cm bulunur.



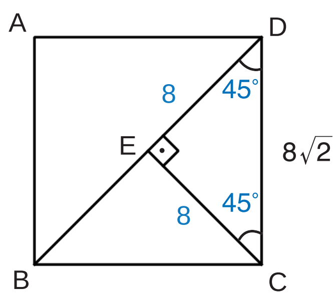
8. ÖRNEK



Yanda verilen ABCD karesinde
$[BD]$ köşegen ve $[BD] \perp [EC]$ olmak üzere $|DC| = 8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre $|EC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

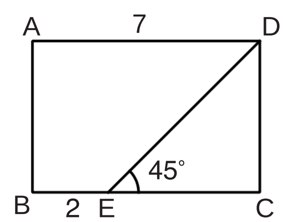
ÇÖZÜM

ABCD kare olduğundan $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{DCE}) = 45^\circ$ olur.
DEC dik üçgeni ikizkenar dik üçgen olacağından $|ED| = |EC| = 8$ cm bulunur.



5 SIRA SİZDE

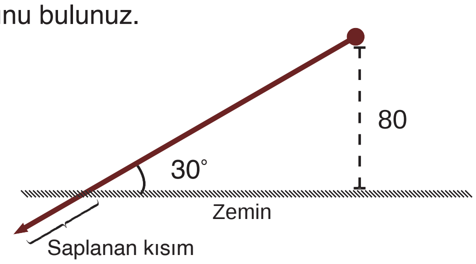
Yandaki şekilde ABCD dikdörtgen ve $\widehat{EDC}$ nin köşeleri dikdörtgen üzerindedir. $m(\widehat{DEC}) = 45^\circ$, $|BE| = 2$ cm ve $|AD| = 7$ cm olduğuna göre $|DE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



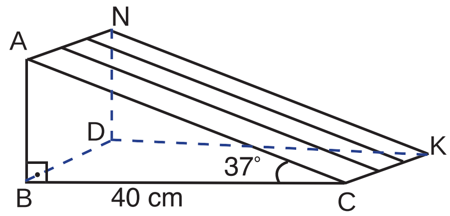
Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5
	24	$\frac{5}{3}$	$\frac{50}{3}$	$40\sqrt{3}$	$5\sqrt{2}$

Alıştırmalar

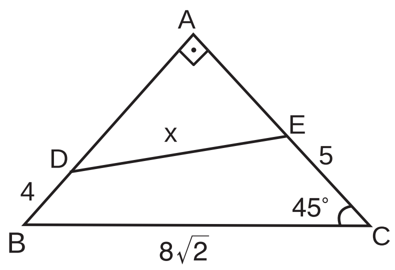
1. Bir cirit atma müsabakasında uzunluğu 200 cm olan cirit, yere 30° lik açı yaparak şekildeki gibi saplanmaktadır. Ciritin dışarıda kalan ucunun yerden yüksekliği 80 cm olduğuna göre ciritin yere saplanan kısmının uzunluğunu bulunuz.



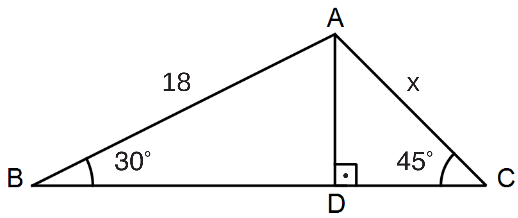
2. Muhsin, garaj girişi için babasının yapacağı rampaya yardım edecektir. Şekilde rampanın üst kısmı ACKN dikdörtgeni şeklindedir. |BC| = 40 cm ve $m(\widehat{ACB}) = 37^\circ$ olduğuna göre Muhsin'in, rampanın üst kısmına konulacak tahtaların uzunluğunu kaç cm olarak belirlemesi gerektiğini bulunuz. ($\tan 37^\circ = 0,75$ alınız.)



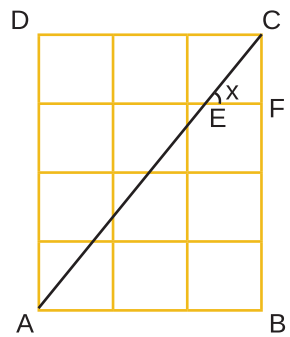
3. Aşağıdaki şekilde ABC dik üçgen, $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$, |DB| = 4 cm, IECI = 5 cm ve |BC| = $8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre IDEI = x in kaç cm olduğunu bulunuz.



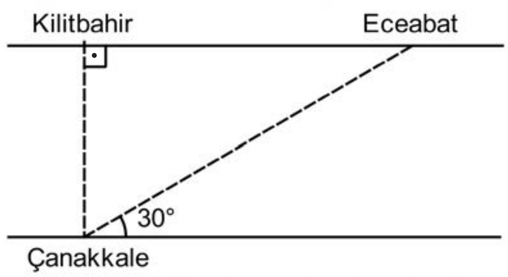
4. Aşağıdaki şekilde ABC bir üçgen, $[AD] \perp [BC]$, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ ve |AB| = 18 cm olduğuna göre IACI = x in kaç cm olduğunu bulunuz.



5. Şekilde eş birim karelerden oluşan ABCD dikdörtgeninde $[AC]$ köşegen ve $m(\widehat{CEF}) = x$ olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.



6. Çanakkale'de öğrenim gören lise öğrencileri, şehitlikleri ziyaret etmek için feribotlarla Eceabat'a geçmektedir. Şekilde Boğaz'dan geçişin noktaları ve doğrultuları verilmiştir. Kilitbahir ile Eceabat arası uzaklık 8 km ve iki kıyı birbirine paraleldir. Feribot kıyıyla 30° açı yapacak şekilde ilerlemiştir. Buna göre feribotun denizde aldığı yol kaç km dir?



Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	40	50	5	$9\sqrt{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16\sqrt{3}}{3}$

2.1.3. Üçgenlerin Benzerliği ile İlgili Problemler

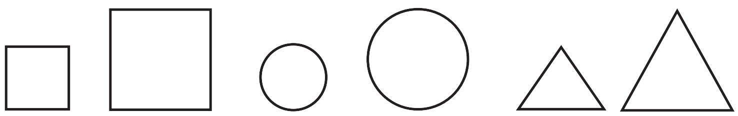
Benzerlik

Günlük hayatta benzer şekillere rastlamak mümkündür. Belli oranda küçültülerek elde edilen model arabalar, modellendiği arabanın bir benzeridir.

İstanbul'da bulunan Miniatürk'te, 134 mimari eserin 1/25 oranında küçültülmüş minyatür modellerine yer verilmiştir. Bu modeller yansıttıkları mimari eserlerin bir benzeridir.

Geometrik şekillerde de geçerli olan benzerlik kavramı birçok problemin çözümünü kolaylaştırır.

Belli oranda büyütülmüş veya küçültülmüş şekillere birbirine benzer şekiller denir.



Herhangi iki kare birbirine benzerdir. Herhangi iki çember birbirine benzerdir. Herhangi iki eşkenar üçgen birbirine benzerdir.

Terimler ve Kavramlar

Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.), Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.), Açı-Açı (A.A.), benzerlik, benzerlik oranı

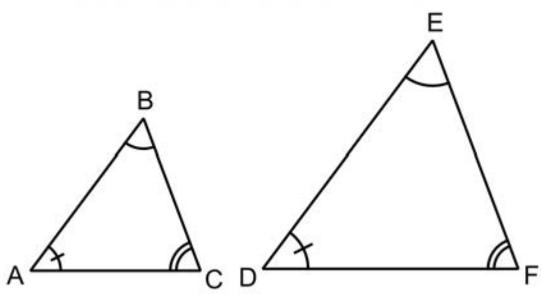
Semboller ve Gösterimler

$\sim$: Benzer

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$: ABC üçgeni ile DEF üçgeni benzerdir.

Üçgenlerde Benzerlik

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı açıları eş veya karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı olan üçgenlere benzer üçgenler denir. Benzerlik durumu "$\sim$" sembolü ile gösterilir.



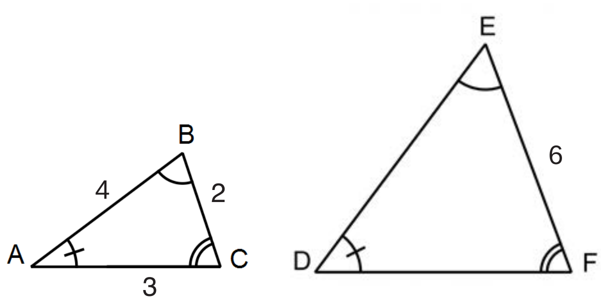
$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nin benzerliği $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ şeklinde gösterilir.

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ ise } \begin{cases} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{cases} \text{ olur.}$$

Benzer üçgenlerde eş açıların karşısındaki kenarların uzunlukları orantılıdır.

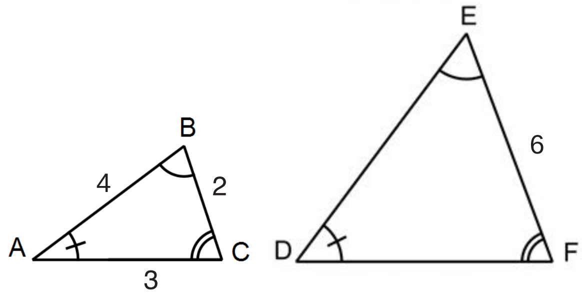
$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k$ olmak üzere k ye benzerlik oranı denir.

1. ÖRNEK



Şekilde verilen $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nin iç açıları eş ve |AB| = 4 cm, |AC| = 3 cm, |BC| = 2 cm, |EF| = 6 cm olduğuna göre |DE| + |DF| toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nin karşılıklı açıları eş olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ dolayısıyla eş açılar karşısındaki kenar uzunlukları oranı sabittir.

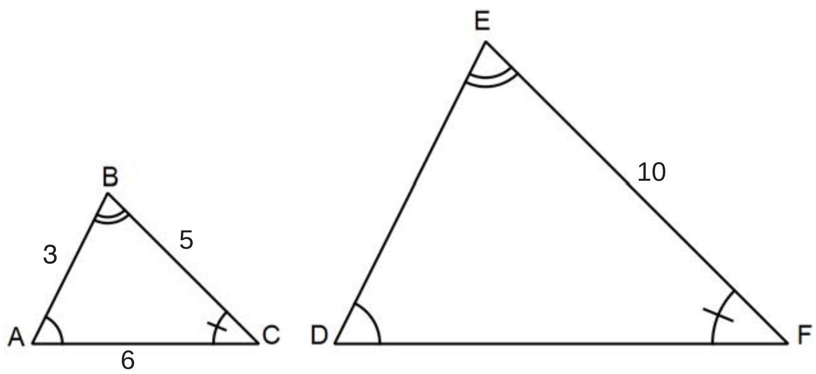
$\frac{4}{|DE|} = \frac{3}{|DF|} = \frac{2}{6} = k$ olacağından $k = \frac{1}{3}$ bulunur.

$\frac{4}{|DE|} = \frac{1}{3}$ olduğundan $|DE| = 12$ cm ve $\frac{3}{|DF|} = \frac{1}{3}$ olduğundan $|DF| = 9$ cm olur.

Dolayısıyla $|DE| + |DF| = 12 + 9 = 21$ cm bulunur.

1 SIRA SİZDE

Şekilde verilen $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ nin iç açıları eş ve $|AB| = 3$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 5$ cm ve $|EF| = 10$ cm olduğuna göre $|DE| + |DF|$ toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

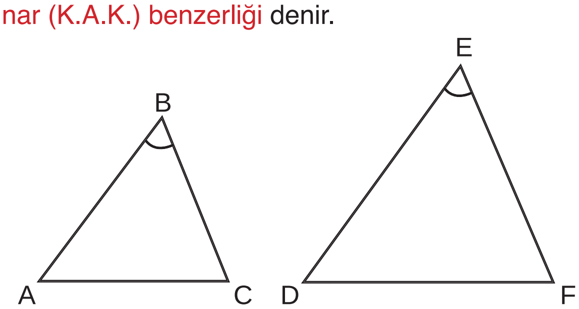


Üçgenlerde Benzerlik Teoremleri

Üçgenlerin benzer olup olmadığına karar verilmesine yarayan üç farklı benzerlik teoremi Kenar-Açı-Kenar, Açı-Açı, Kenar-Kenar-Kenar şeklindedir.

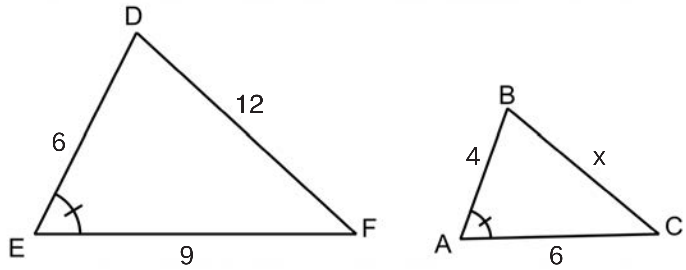
Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Benzerlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu orantılı kenarlar arasındaki açıların ölçüsü eşit ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) benzerliği denir.



$$\left.\begin{array}{l}\frac{|BA|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|EF|} \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})\end{array}\right\} \text{ ise } \widehat{BAC} \sim \widehat{EDF} \text{ olur.}$$

2. ÖRNEK

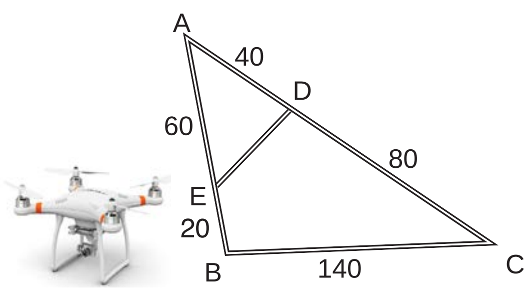


Şekilde EDF ve ABC üçgenlerinde $|DE| = 6$ cm, $|EF| = 9$ cm, $|DF| = 12$ cm $|BA| = 4$ cm ve $|AC| = 6$ cm olmak üzere $m(\widehat{E}) = m(\widehat{A})$ olduğuna göre $|BC| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

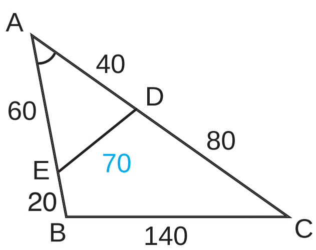
$\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{|EF|}{|AC|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ olduğundan $\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|AC|}$ olur. Ayrıca $m(\widehat{E}) = m(\widehat{A})$ verildiğinden K.A.K. benzerlik teoreminden $\widehat{EDF} \sim \widehat{ABC}$ olur. Sonuç olarak K.A.K. benzerlik teoreminden $\frac{|DF|}{|BC|} = \frac{12}{x} = \frac{3}{2}$ olur. Buradan $3 \cdot x = 24$ ise $x = 8$ cm bulunur.

3. ÖRNEK



Bir teknoloji firması, geliştirdiği uçangözü (drone) test etmek istemektedir. Yandaki üçgen şeklinde bir test alanının E noktasında bulunan uçangöze toplamda en kısa yolu alarak A noktasındaki üç nesneyi alıp E, D ve C noktalarına birer tane bırakması komutu verilmiştir. |AE| = 60 m, |EB| = 20 m, |BC| = 140 m, |CD| = 80 m ve |DA| = 40 m dir. Uçangöz, üçgenlerin çizgileri üzerinde hareket ederek testi başarı ile tamamladığına göre uçangözün aldığı toplam yolun kaç metre olduğunu bulunuz.

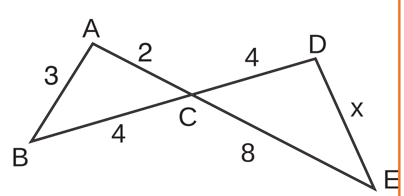
ÇÖZÜM



ADE ve ABC üçgenleri için $\widehat{A}$ ortaktır. $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$, $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ olduğundan K.A.K. benzerlik teoremi gereği $\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ olur. Dolayısıyla $\frac{|ED|}{140} = \frac{1}{2}$ olacağından |ED| = 70 m bulunur. Uçangöz toplamda en kısa yolu alarak görevi tamamladığından aldığı yollar sırası ile E ile A, A ile E, E ile D ve D ile C noktaları arasındaki yollardır. Uçangözün aldığı yol |EA| + |AE| + |ED| + |DC| = 60 + 60 + 70 + 80 = 270 m dir.

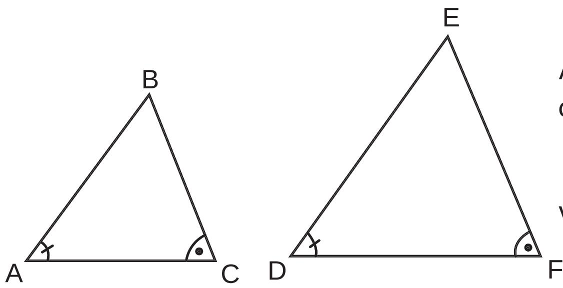
2 SIRA SİZDE

Yandaki şekilde $[AE] \cap [BD] = \{C\}$, ABC ve DEC üçgenlerinin kenar uzunlukları $|AB| = 3$ cm, $|AC| = 2$ cm, $|BC| = |CD| = 4$ cm ve $|CE| = 8$ cm olduğuna göre $|DE| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.



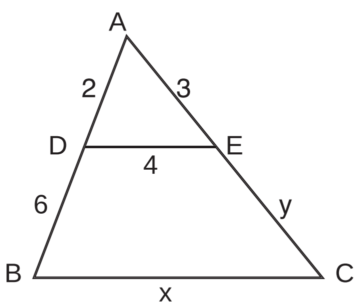
Açı-Açı (A.A.) Benzerlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı ikişer açıları eş ise üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe Açı-Açı (A.A.) benzerliği denir.



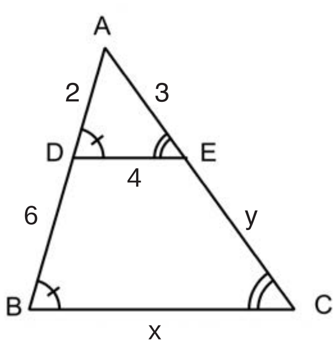
$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{array}\right\}$ ise $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olur. Dolayısıyla A.A. benzerlik teoreminden eşit açıların karşısındaki kenarların uzunlukları orantılıdır. Buradan $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k$ olur. Burada ikişer açısı eşit verilen iki üçgenin üçüncü açıları da eşit olacaktır.

4. ÖRNEK



Yandaki şekilde ABC bir üçgen ve $[DE] \parallel [BC]$ olmak üzere
$|AD| = 2$ cm, $|AE| = 3$ cm, $|DE| = 4$ cm,
$|DB| = 6$ cm, $|EC| = y$, $|BC| = x$
olduğuna göre x + y toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan $m(\widehat{B}) = m(\widehat{ADE})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{AED})$ olur.

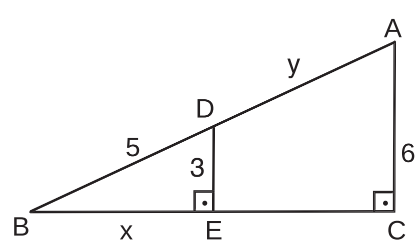
A.A. benzerlik teoreminden $\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ olur. Dolayısıyla

$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$ olduğundan $\frac{2}{8} = \frac{3}{3+y} = \frac{4}{x}$ eşitliği elde edilir.

$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{8} = \frac{3}{3+y} \text{ ise} \\ 2 \cdot (3+y) = 3 \cdot 8 \\ 6 + 2y = 24 \\ 2y = 18 \\ y = 9 \text{ cm} \end{array}\right\}$ ve $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{8} = \frac{4}{x} \text{ ise} \\ 2 \cdot x = 4 \cdot 8 \\ 2x = 32 \\ x = 16 \text{ cm} \end{array}\right\}$ x + y = 9 + 16 = 25 cm olur.

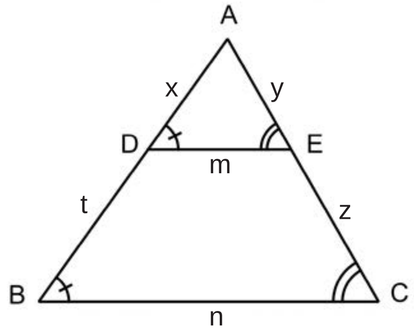
3 SIRA SİZDE

Yandaki şekilde $[AC] \perp [BC]$, $[DE] \perp [BE]$ olmak üzere
$|BD| = 5$ cm, $|DE| = 3$ cm, $|AC| = 6$ cm dir. $|DA| = y$, $|BE| = x$
olmak üzere x + y toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.



Açı-Açı benzerlik teoreminin sonucu olan aşağıdaki bağıntıları bilmek, problem çözümünde kolaylık sağlayacaktır. Aşağıda verilen ABC bir üçgen ve $[DE] \parallel [BC]$ ise

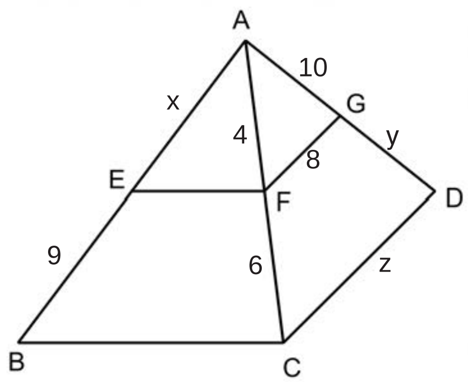
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{ADE})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{AED})$ olur. Dolayısıyla $\widehat{ADE} \sim \widehat{ABC}$ olacağından



$$\frac{x}{x+t} = \frac{y}{y+z} = \frac{m}{n} \text{ olur.}$$

Buradan $\frac{x}{t} = \frac{y}{z}$ elde edilir.

5. ÖRNEK



Yandaki şekilde ABC, CAD birer üçgen ve
[EF] // [BC], [FG] // [CD] olmak üzere
|AE| = x, |EB| = 9 cm,
|AF| = 4 cm, IFCI = 6 cm,
|FG| = 8 cm, ICDI = z,
|AG| = 10 cm, IGDI = y olduğuna göre
x + y + z toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

[EF] // [BC], [FG] // [CD] olduğundan $\widehat{AEF} \sim \widehat{ABC}$ ve $\widehat{AFG} \sim \widehat{ACD}$ olacaktır. Dolayısıyla

ABC üçgeninde $\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$ olacağından
$6 \cdot x = 4 \cdot 9$
$6x = 36$
$x = 6$ cm bulunur.

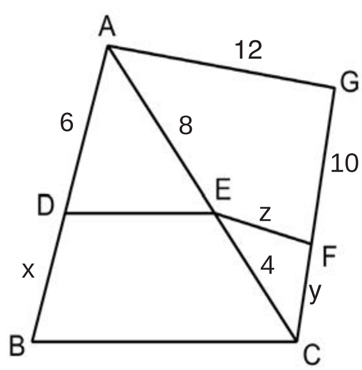
ACD üçgeninde $\frac{4}{6} = \frac{10}{y}$ olacağından
$4 \cdot y = 6 \cdot 10$
$4y = 60$
$y = 15$ cm bulunur.

ACD üçgeninde
$\frac{4}{4+6} = \frac{8}{z}$ olacağından
$4 \cdot z = 8 \cdot 10$
$4z = 80$
$z = 20$ cm bulunur.

Bu durumda x + y + z = 6 + 15 + 20 = 41 cm olur.

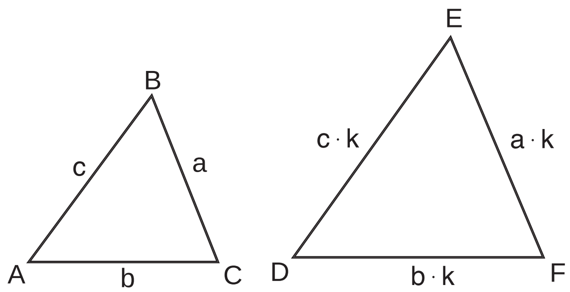
4 SIRA SİZDE

Yandaki şekilde ABC, CAG birer üçgen
[DE] // [BC], [EF] // [AG],
|AD| = 6 cm, IDBI = x,
|AE| = 8 cm, IECI = 4 cm,
|FG| = 10 cm, ICFI = y,
|AG| = 12 cm, IEFI = z,
olduğuna göre x + y + z
toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.



Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Teoremi

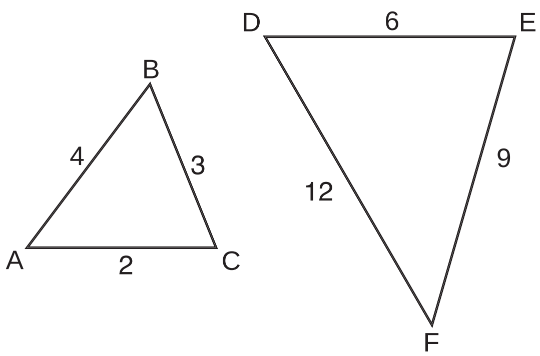
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, iki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) benzerliği denir.



$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|FD|}{|CA|} = k$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF} \text{ ise } \begin{cases} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{cases} \text{ olur.}$$

6. ÖRNEK



Şekilde ABC üçgeninde $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 3$ cm ve $|CA| = 2$ cm, DEF üçgeninde $|DE| = 6$ cm, $|EF| = 9$ cm ve $|FD| = 12$ cm olmak üzere ABC ve DFE üçgenlerinin benzer olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

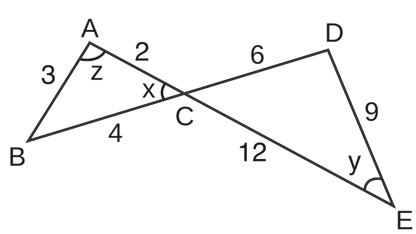
$\frac{|AB|}{|DF|} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{|BC|}{|FE|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{|CA|}{|ED|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ olduğundan

$\frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|FE|} = \frac{|CA|}{|ED|}$ olur.

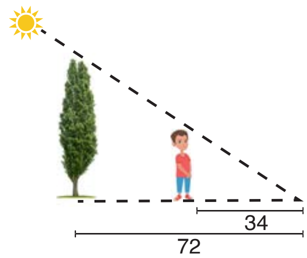
Dolayısıyla K.K.K. benzerlik teoreminden $\widehat{ABC} \sim \widehat{DFE}$ bulunur.

5 SIRA SİZDE

Yandaki şekilde $[AE] \cap [BD] = \{C\}$ ve ABC ile DEC üçgenlerinin kenar uzunlukları $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 2$ cm, $|DC| = 6$ cm, $|EC| = 12$ cm ve $|DE| = 9$ cm şeklinde verilmiştir. $m(\widehat{A}) = z$, $m(\widehat{ACB}) = x$ olduğuna göre $m(\widehat{E}) = y$ nin x ve z cinsinden değerini bulunuz.

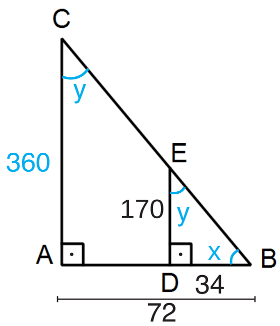


7. ÖRNEK



Mustafa, diktiği bir kavak ağacının boyunu ölçmek istemektedir. Güneşli bir günde şekildeki gibi kendi gölgesinin uzunluğunu 34 cm ölçen Mustafa, aynı anda kavak ağacının gölgesinin uzunluğunu 72 cm ölçmüştür. Mustafa'nın boyu 170 cm olduğuna göre ağacın boyunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilenlerle üçgenler oluşturulup $m(\widehat{B}) = x$ ve $m(\widehat{DEB}) = y$ olarak belirtilirse $x + y = 90^\circ$ olacağından $m(\widehat{ACB}) = y$ olur. A.A. benzerlik teoreminden $\widehat{ABC} \sim \widehat{DBE}$ olur. Dolayısıyla IACI ağacın boyu olmak üzere

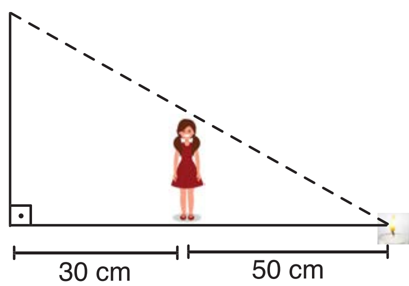
$$\frac{34}{72} = \frac{170}{|AC|}$$

$$\overset{1}{\cancel{34}} \cdot |AC| = 72 \cdot \overset{5}{\cancel{170}}$$

$|AC| = 72 \cdot 5 = 360$ cm bulunur.

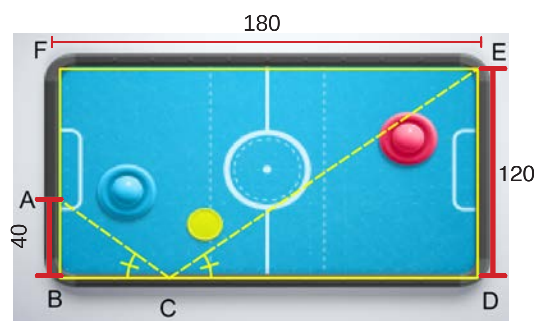
6 SIRA SİZDE

Gamze, yanda şekilde verildiği gibi odasında yaktığı mumu yere koyup 50 cm uzaklaşmaktadır. Duvara uzaklığı 30 cm olacak şekilde durduğunda duvardaki gölgesinin duvarın en üst kısmına değdiğini görmektedir. Gamze, boyunun 150 cm olduğunu bildiğine göre Gamze'nin duvarın yüksekliğini kaç cm olarak hesaplaması gerektiğini bulunuz. (Mumun uzunluğu göz ardı edilecektir.)

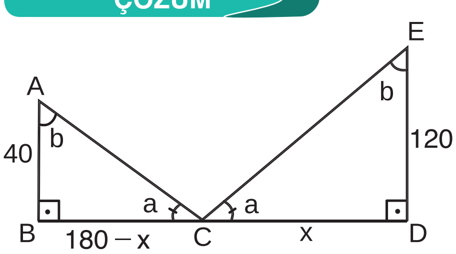


8. ÖRNEK

Şekilde bir masa hokeyi maçında A noktasından çıkan disk, C noktasına çarparak geliş açısıyla sekip E noktasına çarpmaktadır. Hokey masası FBDE dikdörtgeni şeklindedir. $|FE| = 180$ cm, $|DE| = 120$ cm, $|AB| = 40$ cm olduğuna göre $|CD|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM



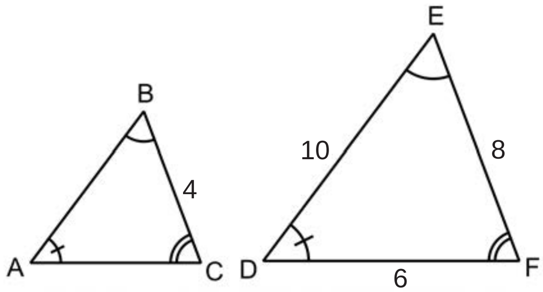
$m(\widehat{BCA}) = a$ ve $m(\widehat{A}) = b$ denilirse $a + b = 90^\circ$ olacağından $m(\widehat{E}) = b$ olur. Dolayısıyla A.A. benzerlik teoreminden $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ olacaktır. $|CD| = x$ olmak üzere

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{180 - x}{x} = \dfrac{40}{120} \\ \dfrac{180 - x}{x} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \text{buradan} \quad \begin{array}{l} x = 540 - 3x \\ 4x = 540 \\ x = 135 \text{ cm bulunur.} \end{array}$$

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	18	6	9	12	$y = 180^\circ - (x + z)$	240

Alıştırmalar

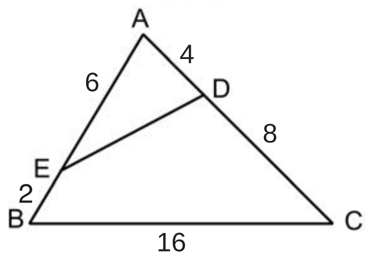
1. Aşağıda verilen üçgenlerde $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ olmak üzere



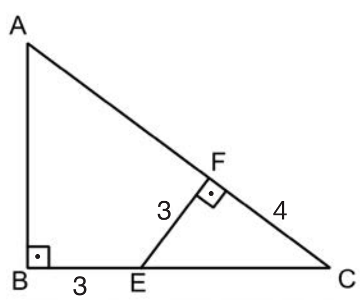
$|ED| = 10$ cm, $|DF| = 6$ cm, $|EF| = 8$ cm ve $|BC| = 4$ cm olduğuna göre $|AB| + |AC|$ toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

2. Şekilde verilen ABC üçgeninde E ve D noktaları üçgen üzerinde olmak üzere

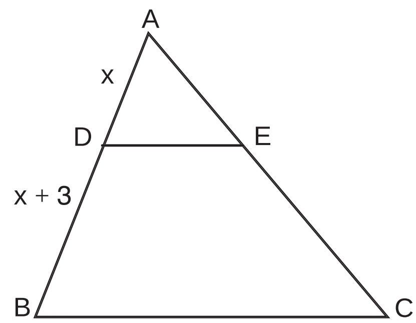
$|AD| = 4$ cm,
$|AE| = 6$ cm,
$|EB| = 2$ cm,
$|BC| = 16$ cm
ve $|DC| = 8$ cm
olduğuna göre
$|ED|$ nun kaç
cm olduğunu
bulunuz.



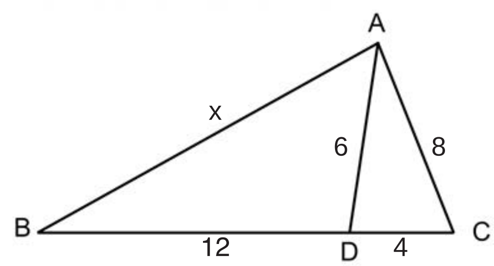
3. Aşağıdaki ABC dik üçgeninde $|BE| = |EF| = 3$ cm, $|FC| = 4$ cm, $[AB] \perp [BC]$ ve $[EF] \perp [AC]$ olduğuna göre $|AF|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



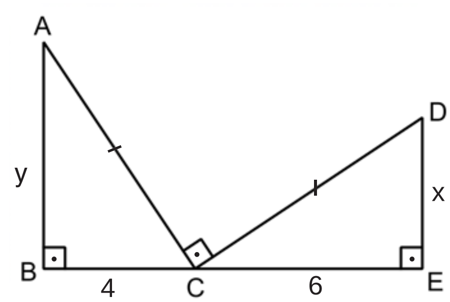
4. Şekilde verilen ABC üçgeninde $[DE] \parallel [BC]$ olmak üzere $|AD| = x$ cm, $|DB| = (x + 3)$ cm ve $|BC| = 3 \cdot |DE|$ olduğuna göre x in kaç cm olduğunu bulunuz.



5. Şekilde verilen ABC üçgeninde $|AC| = 8$ cm, $|DC| = 4$ cm, $|AD| = 6$ cm, $|BD| = 12$ cm ve $|AB| = x$ olmak üzere x in kaç cm olduğunu bulunuz.



6. Şekilde ABC ve DEC dik üçgen $m(\widehat{B}) = 90°$, $m(\widehat{E}) = 90°$, B, C ve E doğrusal olmak üzere $[AC] \perp [DC]$, $|AC| = |DC|$, $|BC| = 4$ cm, $|CE| = 6$ cm, $|AB| = y$ ve $|DE| = x$ olduğuna göre $x + y$ nin kaç cm olduğunu bulunuz.



Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	8	8	6	3	12	10

Öz Değerlendirme Formu

Bu ünite kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için **EVET**, kazanamadığınız beceriler için **HAYIR** kutucuğuna x işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		EVET	HAYIR
1	Bir dik üçgende Pisagor teoremini uygulayabilirim.		
2	Bir dik üçgende Pisagor teoremi ile ilgili problemleri çözebilirim.		
3	Bir dik üçgende Öklid teoremini uygulayabilirim.		
4	Bir dik üçgende Öklid teoremi ile ilgili problemleri çözebilirim.		
5	Bir dik üçgenin bir dar açısının trigonometrik oranlarını söyleyebilirim.		
6	Bir dik üçgenin dar açılarının trigonometrik oranları ile ilgili problemleri çözebilirim.		
7	Üçgenlerde benzerlik teoremlerini söyleyebilirim.		
8	Üçgenlerin benzerlikleri ile ilgili problemleri çözebilirim.		

Değerlendirme

Değerlendirme sonunda **HAYIR** cevaplarınızı gözden geçiriniz. Öğrendiklerinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz.

Ölçme ve Değerlendirme

A. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun kelimelerle doldurunuz.

1. Bir dik üçgende, dik kenarların uzunlukları b, c birim ve hipotenüs uzunluğu a birim ise a^2 = ... olur.

2. Bir dik üçgende açılar ile kenar uzunluklarının oranları arasındaki ilişkilere .... oranlar denir.

3. İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı açılar eş veya karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere .... üçgenler denir.

4. İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede iki üçgenin karşılıklı tüm kenarları orantılı ise bu iki üçgen benzerdir.
Bu benzerliğe .... benzerliği denir.

B. Aşağıda verilen eşleştirmeleri yapınız.

5. Aşağıdaki tanımları tablodaki ifadeler ile eşleştiriniz.

a) Bir dik üçgende verilen bir dar açının karşısındaki dik kenar uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranıdır.

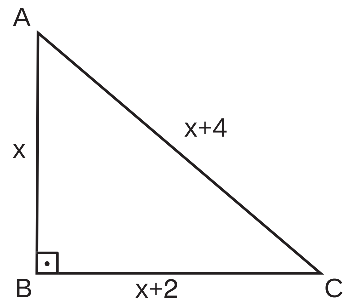
b) Bir dik üçgende verilen bir dar açının karşısındaki dik kenar uzunluğunun komşu dik kenar uzunluğuna oranıdır.

1. Açının sinüs değeri	2. Açının kosinüs değeri
3. Açının tanjant değeri	4. Açının kotanjant değeri

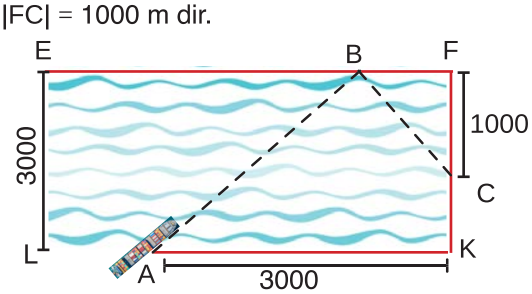
a)	b)

C. Aşağıdaki açık uçlu soruların cevaplarını ilgili alana yazınız.

6. Şekilde ABC dik üçgenin kenar uzunlukları cm cinsinden birer tam sayıdır.
$|AB| = x$
$|BC| = (x+2)$
$|AC| = (x+4)$
$m(\widehat{B}) = 90°$
olduğuna göre x in değerini bulunuz.

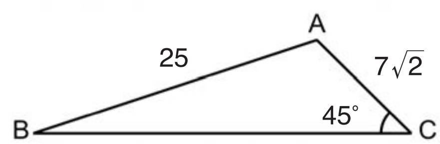


7. Kızılay'a ait bir yardım gemisi, şekildeki EFKL dikdörtgeni şeklindeki bir limana A noktasından giriş yapmıştır. Buradan karşı kıyıdaki herhangi bir B noktasında yükünü boşaltıp C noktasına giderek demirleyecektir. |EL| = |AK| = 3000 m, |FC| = 1000 m dir.



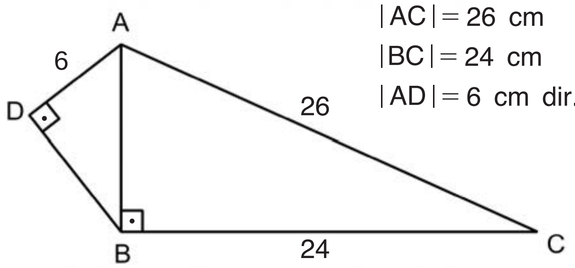
Buna göre geminin alabileceği en kısa yolun kaç metre olduğunu bulunuz.

8. Aşağıdaki şekilde ABC bir üçgen $m(\widehat{C}) = 45°$ olmak üzere



$|AB| = 25$ cm, $|AC| = 7\sqrt{2}$ cm olduğuna göre |BC| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

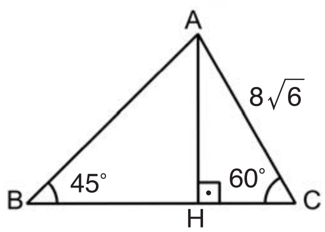
9. Şekilde ABC, ADB birer dik üçgen $[AD] \perp [BD]$, $[AB] \perp [BC]$ olmak üzere



$|AC| = 26$ cm
$|BC| = 24$ cm
$|AD| = 6$ cm dir.

Buna göre |DB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

10. Aşağıdaki şekilde ABC bir üçgen

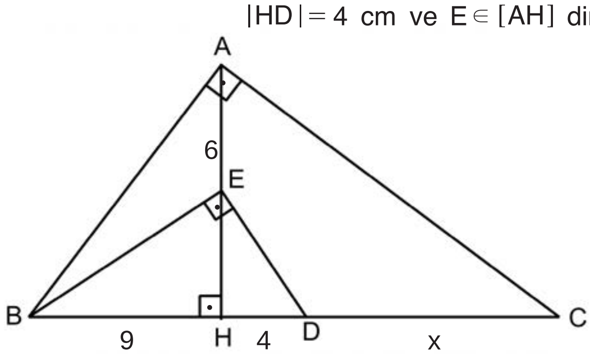


$[AH] \perp [BC]$
$|AC| = 8\sqrt{6}$ cm
$m(\widehat{B}) = 45°$
$m(\widehat{C}) = 60°$

olduğuna göre |AB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.

11. Aşağıdaki şekilde ABC ve BED birer dik üçgen olmak üzere

$[AH] \perp [BC]$, $[BA] \perp [AC]$
$[BE] \perp [ED]$
$|AE| = 6$ cm
$|BH| = 9$ cm
$|HD| = 4$ cm ve $E \in [AH]$ dir.

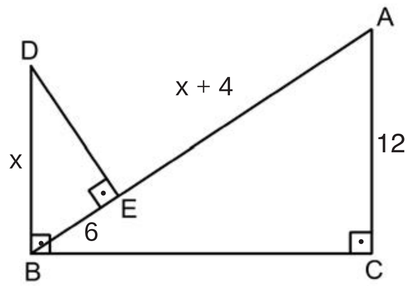


Verilenlere göre $|DC| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

12. Kenar uzunlukları iki basamaklı tam sayı olan bir dik üçgende dik kenarların uzunlukları oranı $\frac{5}{12}$ olduğuna göre hipotenüs uzunluğunun <u>en çok</u> kaç cm olacağını bulunuz.

D. Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplayınız ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

13. Aşağıdaki şekilde ABC ve DBE birer dik üçgen,



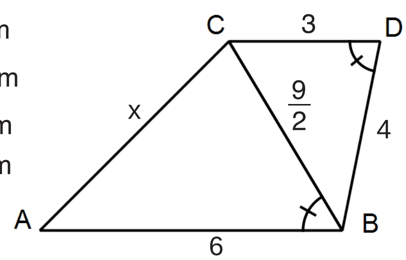
$[DB] \perp [BC]$, $[BC] \perp [CA]$ ve $[DE] \perp [AB]$ olmak üzere $|DB| = x$ cm, $|BE| = 6$ cm, $|EA| = (x + 4)$ cm, $|AC| = 12$ cm dir.

Yukarıda verilenlere göre x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 15

14. Aşağıda ABC ve DBC birer üçgendir.

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BDC})$
$|AB| = 6$ cm
$|DB| = 4$ cm
$|BC| = \frac{9}{2}$ cm
$|CD| = 3$ cm
$|AC| = x$ cm



Yukarıda verilenlere göre x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 7 C) $\frac{27}{4}$ D) 9 E) $\frac{21}{2}$

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7
	$b^2 + c^2$	Trigonometrik	Benzer	Kenar-Kenar-Kenar	a) 1 b) 3	6	5000
	8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
	31	8	24	12	91	B	C



SAYILAR VE CEBİR

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

3. 1. Birinci Dereceden Denklem ve Eşitsizlikler
   - 3. 1. 1. Birinci Dereceden Bir veya İki Bilinmeyenli Denklemler ile İlgili Problemler
   - 3. 1. 2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ile İlgili Problemler

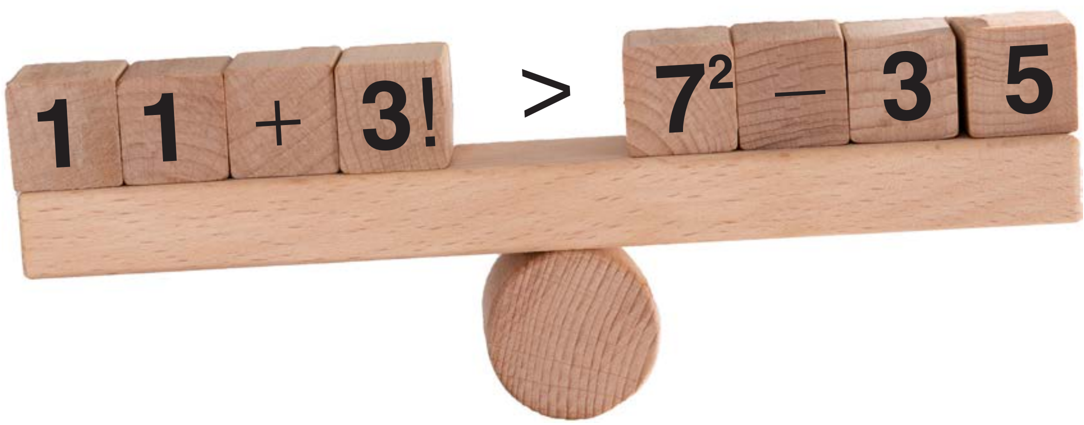
3. 2. Bilinçli Tüketici Aritmetiği
   - 3. 2. 1. Gelirler ve Giderler Göz Önüne Alınarak Birey, Aile ve Kurum Bütçesi Oluşturma
   - 3. 2. 2. Seyahatlerde Mümkün Olan Alternatifleri Karşılaştırma

3. DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

İnsanlar; günlük hayatta alışveriş yaparken, seyahat ederken ya da herhangi bir planlama yaparken farkında olarak ya da olmayarak hesaplamalar yapar. Bu hesaplamalar daha detaylı bir hâl aldığında veya zorlaştığında zihinden işlem yapma, yerini kalem ve kâğıda bırakır. İşte tam bu noktada problemi, matematiğin diline (sayı, sembol ve denklemlere) dönüştürmek gerekir. Kurulan denklemlerin çözümü ile problemin çözümüne ulaşılır.

Ailenin veya kurumların kendi kaynaklarının farkına varması, bu kaynakları verimli bir şekilde kullanması bir planlama gerektirir. Bu planlama süreci, içerisinde matematiksel verilerin analizini barındırır. Dolayısıyla problem çözme becerisi, tasarruf ve bilinçli tüketici kavramları ile doğrudan bağlantılıdır.

Bu bölümde, bir denklemin çözüm adımları verilerek bunun günlük hayatta karşılaşılan problemlere yansıtılması amaçlanmıştır. Ayrıca gelir ile gider arasında denge kurularak bütçe oluşturma, seyahat planlama ve zamanı verimli kullanma becerisi kazandırılmaya çalışılmıştır.



Neler Öğreneceksiniz?

Bu ünitede;

- Birinci dereceden bir veya iki bilinmeyenli denklemler ile ilgili problemler çözmeyi,
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerle ilgili problemler çözmeyi,
- Gelirler ve giderler göz önüne alınarak birey, aile ve kurum bütçesi oluşturmayı,
- Seyahatlerde mümkün olan alternatifleri karşılaştırarak tahminî maliyet analizi yapmayı,
- Gidilecek yere ilişkin bir zaman çizelgesi yapmayı öğreneceksiniz.

Bu Konu Neden Önemli?

- Günlük hayatta birçok problem, denklem ve eşitsizlik ile somutlaştırılıp çözülebilir.
- Bireyler, aileler ve kurumlar gelir gider dengesini kurmaya çalışır. Bu planlamanın nasıl yapılması gerektiği bu bölümde örneklerle açıklanmıştır.

3.1. Birinci Dereceden Denklem ve Eşitsizlikler

Hazırlık Çalışması


Görsel 1



Görsel 2



Görsel 3

Yukarıda verilen eşit kollu terazi görsellerinde özdeş mavi renkli cisimler ile özdeş yeşil renkli cisimler farklı ağırlıktadır. Görsel 1 ve Görsel 2'de verilen teraziler dengededir. Görsel 2'de terazinin sağ kefesinde 12 kg lık ağırlık vardır. Buna göre Görsel 3'te verilen terazinin dengede durması için sağ kefeye kaç kg ağırlık konulmalıdır?

- Yukarıda verilen problemi herhangi bir matematiksel sembol kullanmadan ve denklem kurmadan çözmeye çalışınız. Zorlandığınız noktaları sınıfınızda paylaşınız.
- Yukarıdaki problemi, farklı renkteki cisimleri x, y gibi değişkenlerle isimlendirip terazinin denge durumunu matematiksel eşitlik gibi düşünerek çözmeye çalışınız.
- Farklı iki çözüm yöntemini karşılaştırarak hangisinin daha somut ve kolay olduğunu arkadaşlarınızla tartışınız.

3.1.1. Birinci Dereceden Bir veya İki Bilinmeyenli Denklemler ile İlgili Problemler

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Terimler ve Kavramlar

Bilinmeyen, denklem, değişken, denklemin derecesi, eşitsizlik, aralık, çözüm kümesi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ eşitliğine, x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. a ve b ye denklemin katsayıları, x e değişken adı verilir.

Denklemi sağlayan x değerini bulmaya denklemi çözmek, denklemi sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerine denklemin kökü denir. Denklemin kökünden oluşan kümeye, denklemin çözüm kümesi adı verilir. Çözüm kümesi genellikle Ç harfi ile gösterilir.

Değişkenin üssü denklemin derecesini belirtir. $ax + b = 0$ ifadesindeki x değişkeninin üssü 1 olduğundan denklem, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir.

1. ÖRNEK

$(m-3)x^2 + 4x^{(n-1)} + 2 = 0$ denklemi, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre m + n toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin 1. dereceden olduğu belirtildiğine göre
$(m-3)x^2$ teriminde x^2 ikinci dereceden olduğundan katsayısı 0 olmalıdır. $m-3=0$, $m=3$ bulunur.
Geriye x li terim olarak sadece $4x^{(n-1)}$ kaldığından bu teriminin derecesi 1 olmalıdır. Buradan
$n-1=1$ ve $n=2$ bulunur. $m + n = 3 + 2 = 5$ olur.

$ax + b = 0$ eşitliği

- $a \neq 0$ ise birinci dereceden denklemdir. Bu durumda $x = \frac{-b}{a}$ denklemi sağlar. $Ç = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$ olur.
- $a = 0$ ise birinci dereceden denklem değildir.

  $a = 0$ ve $b = 0$ ise eşitlik $0x + 0 = 0$ şeklinde olur. Bu eşitliği her gerçek sayı sağlar. $Ç = \mathbb{R}$ olur.

  $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise eşitlik $0x + b = 0$ şeklinde olur. Bu eşitliği sağlayan bir x değeri yoktur. $Ç = \{\ \}$ olur.

ANAHTAR BİLGİ

Bir denklemin çözüm adımları, eşit kollu terazide dengeyi bozmadan terazi kefelerine nesneler ekleyip çıkarmaya benzer.

Örneğin $2 + \frac{x}{3} = 4$ şeklinde bir denklemin kökü bulunurken çözüm aşağıdaki gibi yapılabilir.

$3 \cdot (2 + \frac{x}{3}) = 3 \cdot 4$ (Eşitliğin her iki yanı aynı sayı (3) ile çarpılır.)

$6 + \cancel{3} \cdot \frac{x}{\cancel{3}} = 12$

$6 + x = 12$

$6 + x - 6 = 12 - 6$ (Eşitliğin her iki yanından aynı sayı (6) çıkarılır.)

$x = 6$ olur.

2. ÖRNEK

Aşağıda verilen denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $x + 3 = 15$ b) $2x = 8$ c) $5x - 3 = 12$ ç) $-3x + 12 = 0$ d) $\frac{x}{2} = 3$

ÇÖZÜM

a) $x + 3 = 15$ denkleminde eşitliğin her iki tarafından 3 çıkarılırsa

$x + 3 - 3 = 15 - 3$

$x = 12$ bulunur. Çözüm kümesi Ç = {12} olur.

b) $2x = 8$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı 2 ile bölünürse

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ ise $x = 4$ bulunur. Çözüm kümesi Ç = {4} olur.

c) $5x - 3 = 12$ denkleminde eşitliğin her iki tarafına 3 eklenirse

$5x - 3 + 3 = 12 + 3$

$5x = 15$ (Eşitliğin her iki tarafı 5 ile bölünürse)

$x = 3$ bulunur. Çözüm kümesi Ç = {3} olur.

ç) $-3x + 12 = 0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafına 3x eklenirse

$-3x + 3x + 12 = 0 + 3x$

$12 = 3x$ (Eşitliğin her iki tarafı 3 ile bölünürse)

$x = 4$ bulunur. Çözüm kümesi Ç = {4} olur.

d) $\frac{x}{2} = 3$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$2 \cdot \frac{x}{2} = 3 \cdot 2$ ise $x = 6$ bulunur. Çözüm kümesi Ç = {6} olur.

3. ÖRNEK

$12x + 7 = x + 18$ denklemini sağlayan x gerçek sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Değişkenler eşitliğin bir tarafında olacak şekilde düzenlenip x değeri yalnız bırakılarak denklem çözülür.

$12x + 7 = x + 18$ denkleminde eşitliğin her iki tarafından x çıkarılırsa

$12x + 7 - x = x + 18 - x$

$11x + 7 = 18$ olur. Burada eşitliğin her iki tarafından 7 çıkarılırsa

$11x + 7 - 7 = 18 - 7$

$11x = 11$ olur.

Son olarak eşitliğin her iki tarafı da 11 ile bölünürse $\frac{11x}{11} = \frac{11}{11}$ olacağından $x = 1$ bulunur.

Bir denklemin çözüm adımlarının kavranıldığı düşünülerek bu kısımdan itibaren çözüm adımları daha sade bir şekilde verilerek sonuca gidilecektir. Böylece çözümlerin sade, açık ve anlaşılır bir şekilde sunulması amaçlanmıştır.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ile İlgili Problemler

Bir matematiksel problemin çözüm aşamaları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Problemin okunup anlaşılarak problemde verilenlerin ve istenenlerin neler olduğunun belirlenmesi
2. Verilen verilere uygun matematiksel ifadenin (denklemin) kurulması ve denklem çözümünde kullanılacak yöntemin belirlenmesi
3. Belirlenen yöntem ile çözüme gidilmesi
4. Çözümün kontrol edilmesi

4. ÖRNEK

Suvarlı köyünde 2700 koyun, Kayakışlak köyünde 1500 koyun yetiştirilmektedir. Bu iki köydeki hayvancılıkla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Suvarlı köyünün koyunlarının sayısı her yıl 60 azalmaktadır.
- Kayakışlak köyünün koyunlarının sayısı her yıl 20 artmaktadır.

Buna göre bu iki köyün koyunlarının sayısının kaç yıl sonra eşit olacağını yukarıdaki problem çözme adımlarını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Problemde iki farklı köydeki koyun sayısı ve bunların yıllık değişimleri verilerek iki köydeki koyun sayısının kaç yıl sonra eşit olacağı sorulmaktadır.
2. Problemde bulunmaya çalışılan değer, bir bilinmeyen ile temsil edilmelidir. Buna göre x yıl sonra iki köydeki koyun sayısı eşit olsun. x yıl sonra iki köydeki koyunların sayısı x cinsinden yazılır.
   - Suvarlı köyünün koyunları, her yıl 60 azaldığından x yıl sonra koyun sayısı $2700-60x$ olur.
   - Kayakışlak köyünün koyunları, her yıl 20 arttığından x yıl sonra koyun sayısı $1500+20x$ olur.

   x yıl sonra koyun sayılarının eşit olacağı varsayıldığından bu iki veri eşitlenerek
   $1500+20x=2700-60x$ denklemi kurulmalı ve x değeri bulunarak problem çözüme ulaştırılmalıdır.
3. $1500+20x=2700-60x$ (Eşitliğin her iki yanına 60x eklenirse)
   $1500+80x=2700$
   $80x=1200$ burada eşitliğin her iki tarafı 80 ile bölünürse $\frac{\overset{1}{\cancel{80}}x}{\cancel{80}}=\frac{\overset{15}{\cancel{1200}}}{\cancel{80}}$ x = 15 bulunur.
4. Bulunan 15 değeri x yıl sonraki iki köyün koyun sayısını veren ifadelerde yerine yazılarak sonuç kontrol edilir. 15 yıl sonra Suvarlı köyünün koyunlarının sayısı $2700-60\cdot 15=1800$ olur.
   15 yıl sonra Kayakışlak köyünün koyunlarının sayısı $1500+20\cdot 15=1800$ olur. Eşitlik sağlandığından çözüm doğrudur.

5. ÖRNEK

Aşağıda verilen problemleri çözüme ulaştıracak denklemleri yazınız.

a) 3 ekmek 4,5 TL olduğuna göre 1 ekmeğin fiyatını bulunuz.

b) Bir market “1 tane ayran alana ikincisi yarı fiyatına” kampanyası düzenlemiştir. 2 ayran alan bir kişi 3 TL ödediğine göre 1 ayranın kaç TL olduğunu bulunuz.

c) Hangi sayının 9 fazlası, kendisinin 4 katına eşittir?

ç) 12 yıl sonraki yaşı, 5 yıl önceki yaşının iki katı olan bir kişinin şu an kaç yaşında olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) 1 ekmeğin fiyatına x TL denilirse 3 ekmek 3x TL olacağından çözümü verecek denklem
$3x=4,5$ şeklindedir.

b) 1 ayranın fiyatına y TL denilirse ilk ayran y TL, ikinci ayranın fiyatı kampanya gereği $\frac{y}{2}$ TL olur.
Toplamda ödenen miktar 3 TL olduğundan çözümü verecek denklem $y+\frac{y}{2}=3$ olarak bulunur.

c) İstenen sayı z olsun, çözümü verecek denklem $z + 9 = 4z$ olur.

ç) Şimdiki yaşı t olan bir kişinin 12 yıl sonraki yaşı $t + 12$ ve 5 yıl önceki yaşı $t-5$ tir. Buna göre çözümü verecek denklem $t+12=2\cdot(t-5)$ şeklinde bulunur.

1 SIRA SİZDE

Aşağıdaki problemlerin çözümünü veren denklemler yan tarafta yazılmıştır. Her bir problemi çözümünü veren denklem ile eşleştiriniz.

1. Hangi sayının yarısının 3 fazlasının kendisine eşit olacağını bulunuz.
2. %30 indirim ile 140 TL ye satılan bir ürünün indirimsiz fiyatının kaç TL olduğunu bulunuz.
3. 125 litre su bulunan bir depodan günde 5 litre su tüketilirse depodaki suyun kaç günde biteceğini bulunuz.
4. Betül "3 Al 2 Öde" şeklindeki bir kampanyadan 9 gömlek alıp 150 TL ödemiştir. Betül'ün sadece 1 gömlek alması durumunda kaç TL ödemesi gerektiğini bulunuz.

a) $5x = 125$

b) $x-\frac{x\cdot 30}{100}=140$

c) $6x = 150$

ç) $\frac{x}{2}+3=x$

d) $5x = 150$

e) $\frac{x}{3}+2=x$

1.	2.	3.	4.

6. ÖRNEK

A ve B iki futbol takımı olmak üzere bu takımların ligdeki puan durumları aşağıdaki gibidir.

- İki takımın da oynadığı maç sayısı 12 dir.
- Her takım galibiyet için 3, beraberlik için 1 puan almaktadır. Mağlubiyete puan verilmemektedir.
- B takımının mağlubiyet sayısı, A takımının beraberlik sayısına eşit ve 3 tür.
- A takımının mağlubiyet sayısı, B takımının beraberlik sayısına eşittir.

Ligde oynanan 12 maç sonucunda A takımının puanı B takımının puanından 2 fazla olduğuna göre A takımının puanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yandaki tabloda oynanan maç sayısı O, galibiyet G, beraberlik B, mağlubiyet M ve toplam puan P ile gösterilmiştir. A takımının mağlubiyet sayısı x olsun. İki takımın da mağlubiyet ve beraberlik maç sayıları toplamı x + 3 olacağından galibiyet sayıları $12-(x+3)=9-x$ olur. Buna göre

	O	G	B	M	P
A takımı	12	$9-x$	3	x	27
B takımı	12	$9-x$	x	3	25

A takımının puanı $(9-x)\cdot 3+3\cdot 1=30-3x$

B takımının puanı $(9-x)\cdot 3+x\cdot 1=27-2x$

A takımının puanı B takımının puanından 2 fazla olduğuna göre

$(30-3x)-(27-2x)=2$

$3-x=2$

$x = 1$ bulunur. Dolayısıyla A takımının puanı $30-3x=30-3\cdot 1=27$ olur.

7. ÖRNEK

Yurt dışına yardım malzemesi taşıyan AFAD'a (Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı) ait bir tırın götürdüğü yaşam malzemesi paketlerinin 30 aileye dağıtılması planlanmaktadır. Tırın gittiği bölgede 27 aile kaldığından aile başına düşen paket sayısı 2 artmıştır. Buna göre dağıtılan yardım malzemesinin toplam kaç paket olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Başlangıçta aile başına düşen paket sayısına x denirse son durumda aile başına düşen paket sayısı x + 2 olur. Her iki durumda da toplam paket sayısı aynı olacağından

$30 \cdot x = 27 \cdot (x+2)$

$30x = 27x + 54$

$3x = 54$ buradan x = 18 olarak bulunur. Toplam paket sayısı $30 \cdot 18 = 540$ bulunur.

2 SIRA SİZDE

Bir tavuk çiftliğinde tavuklara her gün eşit miktarda yem verilmek üzere 90 tavuk için 30 gün yetecek kadar yem vardır. Çiftlikteki tavuklardan 30 tanesi satıldığında kalan tavukların her birinin günlük yiyebileceği yem miktarı 100 gr artmaktadır. Buna göre başlangıçtaki yem miktarının kaç kg olduğunu bulunuz.

MATEMATİKTE İZ BIRAKANLAR

Ömer Hayyam (1048 - 1131)

Şair, filozof, matematikçi ve astronomdur. Ömer Hayyam bir çadırcının oğludur. Çadırcı anlamına gelen soyadını, babasının mesleğinden almıştır. Fakat o, soyadının çok ötesinde işlere imza atmıştır. Tıp, fizik, astronomi, cebir, geometri ve yüksek matematik alanlarında önemli çalışmaları vardır.

Ömer Hayyam, cebiri sayısal ve geometrik bilinmeyenlerin belirlenmesini amaçlayan bilim olarak tanımlardı. Matematik bilgisi ve yeteneği zamanın çok ötesinde olan Ömer Hayyam, denklemlerle ilgili başarılı çalışmalar yapmıştır. Nitekim, Hayyam 3. dereceden 13 farklı denklem tanımlamıştır.

Bunun yanı sıra Hayyam, binom açılımını da bulmuştur. Binom teoremini ve bu açılımdaki katsayıları bulan ilk kişi olduğu düşünülmektedir.

http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3121/omer-hayyam (Düzenlenmiştir.)

8. ÖRNEK

Bir şirket bir bölgede yaptığı konutları $\frac{1}{6}$ oranında engellilere, $\frac{5}{12}$ oranında gazi ve malullere, $\frac{1}{4}$ oranında şehit yakınlarına ayırmıştır. Geriye kalan 60 daireyi ise emeklilere ayırmıştır. Buna göre bu bölgede toplam kaç konut yapıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplam konut sayısına x denilirse $\frac{x}{6}+\frac{5x}{12}+\frac{x}{4}+60=x$ olur. Payda eşitlenirse $\underset{(2)}{\frac{x}{6}}+\underset{(1)}{\frac{5x}{12}}+\underset{(3)}{\frac{x}{4}}+\underset{(12)}{\frac{60}{1}}=x$

$\frac{2x}{12}+\frac{5x}{12}+\frac{3x}{12}+\frac{720}{12}=x$

$\frac{10x+720}{12}=x$ Eşitliğin her iki yanı 12 ile çarpıldığında

10x + 720 = 12x

2x = 720 eşitliğinden x = 360 bulunur.

3 SIRA SİZDE

TİKA (Türk İş Birliği ve Koordinasyon Ajansı) Başkanlığı ve Saraybosna Üniversitesi Ziraat Fakültesi iş birliğinde "Bosna'nın Kınalı Elleri Üretime Katılıyor" programı kapsamında 3 belediye bölgesinde arazi sahibi ailelere 100 m^2 lik seralar kurulmuştur. Bu bölgeler ve yardım yapılan aile sayıları ile ilgili şunlar verilmiştir. Srebrenica (Sirebrenitsa) bölgesinde yardım yapılan aile sayısının, Bratunanc (Bıratunas) bölgesinde yardım yapılan aile sayısına oranı $\frac{2}{3}$ ve Srebrenica bölgesinde yardım yapılan aile sayısı Zivince (Zivinse) bölgesinde yardım yapılan aile sayısından 25 fazladır. Toplam yardım yapılan aile sayısı 80 olduğuna göre Bratunanc bölgesinde yardım yapılan aile sayısını bulunuz.

9. ÖRNEK

Geliştirilen bir akıllı telefon programı belli bir yazı stiline göre bir metnin kaç punto olduğunu ve sayfa üzerinde yatay yöndeki uzunluğunun kaç mm olduğunu hesaplayabilmektedir.
Bu yazılımın kodlamasında kullanılan matematiksel veriler aşağıdaki gibidir.

- 1 puntoluk bir harf 0,35 mm genişliğe sahiptir. (Bütün harfler eşit genişlikte kabul edilecektir.)
- Bir boşluk, metindeki yazı stilinin punto cinsinden yarısı kadar genişliktedir.
- Program, yazılan metnin puntosundan bağımsız olarak noktalama işaretlerini 2 punto hesaplamaktadır.

Bu program "Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım." mısrasının uzunluğunu 169,4 mm olarak hesapladığına göre bu mısranın yazıldığı puntoyu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen mısrada 37 harf, 6 boşluk, 2 noktalama işareti bulunmaktadır. Mısranın yazıldığı punto x olsun.
37 harf, her biri x punto olduğundan $37 \cdot x \cdot 0,35 = 12,95x$ mm
6 boşluk, her biri $\frac{x}{2}$ punto olacağından $6 \cdot \frac{x}{2} \cdot 0,35 = 1,05x$ mm
ikişer puntodan 2 noktalama işareti $2 \cdot 2 \cdot 0,35 = 1,4$ mm
denklem yazılırsa $12,95x + 1,05x + 1,4 = 169,4$ olur. Buradan $14x + 1,4 = 169,4$ ise $14x = 168$ olur.
$x = 12$ punto bulunur.

4 SIRA SİZDE

240 çalışanı bulunan bir firma, tüm çalışanlarına ikramiye çeki dağıtacaktır. Ustalara 80 TL lik ve diğer çalışanlara 90 TL lik çeklerden birer tane dağıtılmıştır. Toplam 21000 TL tutarında çek dağıtımı yapıldığına göre bu firmanın kaç ustası olduğunu bulunuz.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler ile İlgili Problemler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a, b \neq 0$ olmak üzere ax + by + c = 0 şeklindeki ifadelere, x ve y değişkenlerine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir. $x, \ y \in \mathbb{R}$ olmak üzere denklemi sağlayan (x, y) sıralı ikilisine denklemin çözüm kümesinin bir elemanı denir.

x, y bilinmeyen ve a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{R}$ olmak üzere ax + by + c = 0 ve dx + ey + f = 0 denklemlerinden oluşan $\left.\begin{matrix} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{matrix}\right\}$ sisteme birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi denir.

Her iki denklemi sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin kümesine denklem sisteminin çözüm kümesi denir. Bu tür denklem sistemleri "yok etme, yerine koyma" yöntemlerinden herhangi biri kullanılarak çözülebilir.

Yok Etme Yöntemi

Denklem sisteminde bilinmeyenlerden herhangi birinin katsayısı, diğer denklemdeki aynı bilinmeyenin katsayısıyla mutlak değerce eşit, işaret bakımından ters olacak şekilde düzenlenir. Taraf tarafa toplama yoluyla seçilmiş olan değişken yok edilerek bir bilinmeyenli denklem elde edilip çözüm yapılır.

10. ÖRNEK

$\left.\begin{matrix} 4x-3y=13 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemlerde, y değişkeninin katsayılarının işaretleri zıt olduğundan ikinci denklem 3 ile genişletilerek katsayıları mutlak değerce eşitlenip taraf tarafa toplanırsa

$4x-3y=13 \longrightarrow 4x-3y=13$

$3 \cdot x+3 \cdot y=3 \cdot 5 \longrightarrow \underline{3x+3y=15} \ +$

$7x = 28$ bulunur.

Buradan x = 4 olur. x = 4 değeri x + y = 5 de yerine yazılır ise 4 + y = 5 olacağından y = 1 olur. Çözüm kümesi Ç = {(4, 1)} bulunur.

Yerine Koyma Yöntemi

Denklem sistemindeki denklemlerin herhangi birinden bir değişkenin diğer değişken türünden eşiti bulunur ve ikinci denklemde yerine yazılarak bir bilinmeyenli denklem elde edilip çözüm yapılır.

11. ÖRNEK

$\left.\begin{matrix} 2x+3y=22 \\ 2x+y=14 \end{matrix}\right\}$ Denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

2x + y = 14 denkleminden $y=14-2x$ elde edilir. Bulunan bu değer, diğer denklemde yerine yazılır ve $2x+3 \cdot (14-2x)=22$ bir bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklemden çözüme gidilir ise

$2x+42-6x=22$

$42-4x=22$

$20=4x$ ise $x=5$ bulunur.

x = 5 değeri 2x + y = 14 denkleminde yazılır ve $2 \cdot 5+y=14$ ise $y=4$ bulunur.
Çözüm kümesi Ç = {(5, 4)} olur.

12. ÖRNEK

Bir kargo firması, 30 kg lık her bir paket için 18 TL, 40 kg her bir paket için 20 TL almaktadır. Toplamda 25 paket ürünü 480 TL ödeyerek gönderen birinin 30 kg lık paketlerden kaç tane gönderdiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

30 kg lık paket sayısı x, 40 kg lık paket sayısı y olsun. Buna göre toplam paket sayısı 25 olduğundan x + y = 25 olur ve toplam ödenen miktar 480 TL olduğundan 18x + 20y = 480 olur. Buradan

$$\left.\begin{aligned} x+y&=25 \\ 18x+20y&=480 \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir. Birinci denklemden $y = 25 - x$ olur.

Bu değer, diğer denklemde yerine yazılırsa $18x + 20(25 - x) = 480$ şeklinde bir bilinmeyenli denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü yapılırsa

$18x + 20(25 - x) = 480$

$18x + 500 - 20x = 480$

$500 - 2x = 480$

$2x = 20,\ x = 10$ bulunur. 30 kg lık paketlerden 10 adet göndermiştir.

5 SIRA SİZDE

Muhammed, Nergiz ve Fatih adlı üç kardeş kırtasiyeye alışverişe gitmiştir. Muhammed, kırtasiyeden 2 kalem ve 5 defter alarak 24 TL ödemiştir. Nergiz, 6 kalem ve 3 defter alarak 24 TL ödemiştir. Kardeşler aynı türden defter ve kalem aldığına göre Fatih'in 1 kalem ve 1 defter aldığında kaç TL ödeyeceğini bulunuz.

13. ÖRNEK

Halis, babasının şimdiki yaşına geldiğinde babasıyla yaşlarının toplamı 110 olmaktadır. Yaşlarının farkı, Halis'in şimdiki yaşının 2 katından 6 eksiktir. Buna göre Halis'in şimdiki yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

Halis'in, babasının yaşına gelmesi için geçen süre, ikisinin yaşlarının farkı kadardır. Buna göre Halis'in şimdiki yaşına x, babanın şimdiki yaşına x + y denirse yaşlarının farkı y olur.

Babanın şimdiki yaşı	Halis'in şimdiki yaşı
x + y	x
x + y + y	x + y

(Halis, babasının yaşında; y yıl sonra)

y yıl sonra yaşlarının toplamı x + y + y + x + y = 110 olacağından 2x + 3y = 110 olur. Halis'in şimdiki yaşının 2 katının 6 eksiği, yaşları farkına eşit olduğundan $y = 2x - 6$ bulunur. Bu y değeri diğer denklemde yerine yazılarak

$2x + 3y = 110$

$2x + 3(2x - 6) = 110$

$2x + 6x - 18 = 110$

$8x = 128$ ise $x = 16$ bulunur.

14. ÖRNEK

Bir lise, okul öğrenci temsilcisinin talebi doğrultusunda Türk Silahlı Kuvvetleri Dayanışma Vakfına bağış kampanyası düzenlemiştir. Bağışlar, kısa mesaj veya bankaya yatırma olmak üzere iki farklı yolla yapılabilmektedir. Her kısa mesaj ile katılım bedeli 10 TL ve hesaba yatırma yolu ile katılım bedeli 20 TL dir. Kampanyaya kısa mesaj ile katılan öğrenci sayısı, hesaba yatırma yoluyla katılan öğrenci sayısının 3 katı, kısa mesaj yolu ile katılan öğretmen sayısı hesaba yatırma yoluyla katılan öğretmen sayısının yarısı kadardır. Kampanyaya toplam 460 kişi katıldığına ve 6000 TL toplandığına göre bu kampanyaya hesaba yatırma yoluyla katılan öğrenci sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Hesaba yatırma yoluyla katılan öğrenci sayısına x denirse mesaj yoluyla katılan öğrenci sayısı 3x olur. Mesaj yoluyla katılan öğretmen sayısı y olsun hesaba yatırma yoluyla katılan öğretmen sayısı 2y olur.

	Hesaba Yatıranlar	Kısa Mesaj Gönderenler
Öğretmen	2y	y
Öğrenci	x	3x
Toplam	2y + x	y + 3x

Toplanan yardım miktarı 6000 TL olduğundan

$(2y+x)\cdot 20+(y+3x)\cdot 10=6000$

$40y+20x+10y+30x=6000$

$50y+50x=6000$

$x+y=120$ bulunur.

Toplam katılan kişi sayısı 460 olduğundan

$2y+x+y+3x=460$ ise $4x+3y=460$ olur. Dolayısıyla

$\left.\begin{array}{l}4x+3y=460\\ x+y=120\end{array}\right\}$ denklem sistemi elde edilir. Buradan yok etme yöntemi ile

$$\begin{array}{rl} & 4x+3y=460\\ + & -3x-3y=-3\cdot 120\\ \hline & x=100 \text{ bulunur.}\end{array}$$

15. ÖRNEK

Doğal yoğurt satmak isteyen Ayşenur, evinde bulunan eşit aralıklı 4 ölçek çizgisine sahip kovayı kullanmak istemektedir. Kovanın tam doluyken kaç kg yoğurt aldığını annesine soran Ayşenur, kovanın çeyrek çizgisine kadar doluyken 1500 gr, tam doluyken 4500 gr olduğunu öğrenir. Buna göre kovanın en çok kaç gr yoğurt aldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kovanın kütlesi x gr ve tam doluyken aldığı yoğurt y gr olsun.

Kovanın çeyreği doluyken $x+\frac{y}{4}=1500$ denklemi elde edilir.

Kova tam doluyken x + y = 4500 denklemi elde edilir.

Bu denklemler ile elde edilen denklem sistemi, yok etme yöntemi ile çözülerek y değeri bulunabilir.

$$\begin{array}{rl} & \cancel{-1\cdot x}-1\cdot\frac{y}{4}=-1\cdot 1500\\ + & \cancel{x}+y=4500\\ \hline & y-\frac{y}{4}=3000\end{array}$$

$\frac{3y}{4}=3000$

$3y=12\,000,\ y=4000$ gr bulunur.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5
	1 - ç, 2 - b, 3 - a, 4 - c	540	45	60	6

Alıştırmalar

1. Bir otobüsteki kadınların sayısı, erkeklerin sayısının yarısı kadardır. İlk durakta 6 erkek inip 8 evli çift bindiğinde kadınların sayısı erkeklerin sayısına eşit olmaktadır. Buna göre başlangıçtaki kadın yolcu sayısını bulunuz.

2. 160 soruluk bir sınavda, her 4 yanlış cevap için 1 doğru cevap silinerek öğrencinin neti hesaplanmaktadır. 120 soru işaretleyen bir öğrenci 92,5 net yaptığına göre öğrencinin kaç soruyu doğru cevapladığını bulunuz.

3. Bir kreş öğretmeni, öğrencilerine cuma günleri hediye almaktadır. Kız öğrenciler için tanesi 4 TL olan sarı, erkek öğrenciler için tanesi 5 TL olan yeşil cüzdanlardan alan öğretmen, toplam 100 TL ödemiştir. Sarı cüzdanların sayısı, yeşil cüzdanların sayısından az olduğuna göre öğretmenin <u>en fazla</u> kaç tane sarı cüzdan alabileceğini bulunuz.

4. Bir lise, kardeş okul olarak seçtiği bir okulun kütüphanesini zenginleştirmek için kitap göndermek istemektedir. Konu öğrencilere duyurularak okudukları veya kullanmayacakları kitapları bağışlayabilecekleri söylenmiştir. Öğrencilerin kitap bağışları ile ilgili bilgiler aşağıdaki gibidir.

- Her öğrenci, en az bir kitap bağışı yapmıştır.
- 3 kitap bağışı yapan öğrenci sayısı, 2 kitap bağışı yapan öğrenci sayısından 50 fazladır.
- 1 kitap bağışı yapan öğrenci sayısı, 3 kitap bağışı yapan öğrenci sayısının 2 katıdır.
- Bağışlar sadece 1, 2, 3 adet olarak yapılmıştır.
- Toplam 810 kitap bağışı olmuştur.

Buna göre bu okulda toplam kaç öğrenci olduğunu bulunuz.

5. Bir inşaat firması, kentsel dönüşüm çerçevesinde bir sitedeki konutları yıkıp yeniden inşa edecektir. Firma, inşa edeceği dairelerin $\frac{5}{12}$ ni kat sahiplerine, $\frac{1}{6}$ ni yapılan anlaşma gereği işçilere verecektir. Kalanın $\frac{4}{5}$ nü satarak inşaat maliyetini karşılayacaktır. Firma geriye kalan 20 daireyi satmayı planladığına göre firmanın toplam kaç daire inşa edeceğini bulunuz.

6. Kızılay, depremzedeler için geçici mesken olarak alanları 48 m^2 ve 60 m^2 olan prefabrik konutlar inşa edecektir. 48 m^2 olan konutların maliyeti 10 000 TL, 60 m^2 olan konutların maliyeti 12 000 TL dir. Toplam 6000 m^2 lik 116 konut yapılacaktır. Buna göre bu işin toplam maliyetinin kaç TL olduğunu bulunuz.

7. Bir sınıfta öğrenciler sıralara üçer kişi oturursa 14 kişi ayakta kalmaktadır. Dörder kişi oturursa 3 sıra boş kalmaktadır. Buna göre sınıfta kaç sıra olduğunu veren denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4x + 3 = 4(x - 3)$　　B) $3x - 4 = 3(x - 4)$

C) $3x + 14 = 4(x - 3)$　　D) $4x + 3 = 3x + 16$

E) $x + 14 = 4(x + 3)$

8. Sine'nin 6 yıl önceki yaşı, Furkan'ın şimdiki yaşından 2 fazla; Sine'nin 10 yıl sonraki yaşı ise Furkan'ın 2 yıl sonraki yaşının 2 katından 2 fazladır. Buna göre Furkan ile Sine'nin bugünkü yaşları toplamını bulunuz.

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8
	6	98	10	470	240	1 232 000	C	32

3.1.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ile İlgili Problemler

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax+b<0$, $ax+b \leq 0$, $ax+b>0$ ve $ax+b \geq 0$ şeklindeki ifadelere x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir. Örneğin $2x + 6 > 12$, $x + 5 < 7$ ve $2x \geq 14 + x$ ifadeleri birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliktir.

Eşitsizliklerin çözüm kümesi, gerçek sayıların bir alt aralığıdır.

Terimler ve Kavramlar

Bilinmeyen, denklem, değişken, denklemin derecesi, eşitsizlik, aralık, çözüm kümesi

Gerçek Sayı Aralıkları

$a, b, x \in \mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere a ve b sayıları ile bu sayıların arasındaki bütün gerçek sayılar; [a, b] nı oluşturur. Aralıklar, iki uç noktalarını da içeriyorlarsa kapalı aralık, sadece bir uç noktasını içeriyorlarsa yarı-açık aralık, iki uç noktalarını da içermiyorlarsa açık aralık olarak adlandırılırlar.

Semboller ve Gösterimler

$[a, b]$: Kapalı aralık
(a, b) : Açık aralık
$[a, b)$: Yarı açık aralık
$(a, b]$: Yarı açık aralık



$a \leq x \leq b$ ise $x \in [a, b]$ (Kapalı aralık)



$a \leq x < b$ ise $x \in [a, b)$ (Yarı açık aralık)



$a < x \leq b$ ise $x \in (a, b]$ (Yarı açık aralık)



$a < x < b$ ise $x \in (a, b)$ (Açık aralık)

Eşitsizlikler ile İlgili Özellikler

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenebilir ya da eşitsizliğin her iki tarafından aynı sayı çıkarılabilir. Bu işlemler yapıldığında eşitsizliğin yönü değişmez. $a<b$ ise $a+c<b+c$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez. $c>0$ ve $a<b$ ise $a \cdot c<b \cdot c$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir. $c<0$ ve $a<b$ ise $a \cdot c>b \cdot c$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ olur.

Aynı işaretli ifadelerin sıralandığı eşitsizliklerde, her iki tarafın çarpma işlemine göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirir. $a<b<0$, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ve $0<a<b$, $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ olur.

$a \cdot b<0$ ise a ile b zıt işaretli, $a \cdot b>0$ ise a ile b aynı işaretlidir.

1. ÖRNEK

$3x + 4 < 22$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı pozitif tam sayı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x + 4 - 4 < 22 - 4$ (Eşitsizliğin her iki yanından 4 çıkarılır.)

$3x < 18$

$\frac{3x}{3} < \frac{18}{3}$ (Eşitsizliğin her iki yanı 3 ile bölünür.)

$x < 6$ bulunur. x pozitif tam sayı olduğundan 5, 4, 3, 2, 1 olmak üzere 5 farklı değer alır.

2. ÖRNEK

$2x + 1 < 21$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x + 1 - 1 < 21 - 1$ (Eşitsizliğin her yanından 1 çıkarılır.)

$\frac{2x}{2} < \frac{20}{2}$ (Eşitsizliğin her iki yanı 2 ile bölünür.)

$x < 10$ bulunur. Çözüm kümesi $Ç = (-\infty, 10)$ bulunur.

3. ÖRNEK

$2 \leq \frac{x-1}{3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3 \cdot 2 \leq 3 \cdot \frac{x-1}{3}$ (Eşitsizliğin her yanı 3 ile çarpılır.)

$6 \leq x - 1$

$6 + 1 \leq x - 1 + 1$ (Eşitsizliğin her yanına 1 eklenir.)

$7 \leq x$ bulunur. Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = [7, \infty)$

4. ÖRNEK

$3 > \frac{x}{-4}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3 \cdot (-4) < \frac{x}{-4} \cdot (-4)$ (Eşitsizliğin her iki yanı -4 ile çarpılır ise eşitsizlik yön değiştirir.)

$-12 < x$ olduğundan çözüm kümesi $Ç = (-12, \infty)$ bulunur.

1 SIRA SİZDE

$3 \leq \frac{x}{-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

5. ÖRNEK

$-4 < \frac{x}{-3}$ eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(-3) \cdot (-4) > (-3) \cdot (\frac{x}{-3})$ (Eşitsizliğin her yanı −3 ile çarpılır ise eşitsizlik yön değiştirir.)
$12 > x$ olacağından çözüm kümesi $Ç = (-\infty, 12)$

6. ÖRNEK

$\frac{x}{3} \geq \frac{1}{2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{x}{3} \cdot 3 \geq \frac{1}{2} \cdot 3$ (Eşitsizliğin her yanı 3 ile çarpılır.)
$x \geq \frac{3}{2}$ olacağından çözüm kümesi $Ç = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ bulunur.

7. ÖRNEK

$x < 4$ ve $y = 2x + 1$ olmak üzere y nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x \cdot 2 < 4 \cdot 2$ (Eşitsizliğin her yanı 2 ile çarpılır.)
$2x < 8$
$2x + 1 < 8 + 1$ (Eşitsizliğin her yanına 1 eklenir.)
$2x + 1 < 9$
y = 2x + 1 olduğundan bu değer, eşitsizlikte yerine yazılırsa $y < 9$ olacağından y nin en büyük tam sayı değeri 8 bulunur.

8. ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{Z}$, $-3 < x < 5$ ve $y = 3x + 2$ olmak üzere y nin en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

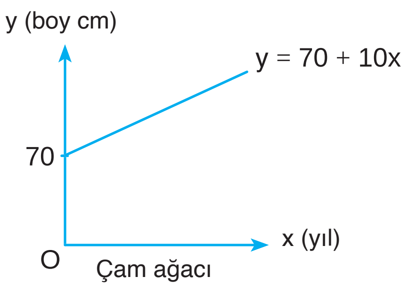
x tam sayı olduğundan x in alabileceği tam sayı değerleri üzerinden sonuca gidilir. y = 3x + 2 ifadesinin en büyük değerini alması için x sayısı en büyük seçilmelidir.
$-3 < x < 5$ eşitsizliğini sağlayan en büyük x tam sayı değeri 4 olduğundan y nin en büyük tam sayı değeri $y = 3 \cdot 4 + 2 = 14$ bulunur.

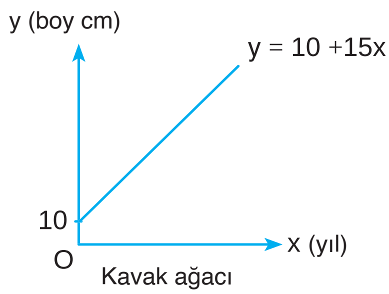
2 SIRA SİZDE

$x, y \in \mathbb{Z}$, $2 < x \leq 7$ ve $y = 5x + 2$ olmak üzere y nin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

9. ÖRNEK

Aşağıdaki grafiklerde boyları doğrusal olarak uzayan iki farklı fidan türünün dikildiği andaki boyları ve yıllara bağlı boy denklemleri verilmiştir. Buna göre kavak ağacının boyu kaçıncı yıldan sonra çam ağacının boyundan uzun olacaktır?





ÇÖZÜM

Verilenlere göre çam ağacının dikildiği andaki boyu 70 cm dir ve her yıl 10 cm uzamaktadır. Kavak ağacının dikildiği andaki boyu 10 cm dir ve her yıl 15 cm uzamaktadır. Kavak ağacının boyunun hangi yıldan itibaren çam ağacının boyundan uzun olduğunu bulmak için $70 + 10x < 10 + 15x$ eşitsizliği çözülmelidir.

$70 + 10x - 10x < 10 + 15x - 10x$ (Eşitsizliğin her iki yanından 10x çıkarılır.) $70 < 10 + 5x$

$70 - 10 < 10 + 5x - 10$ (Eşitsizliğin her iki yanından 10 çıkarılır.)

$\frac{60}{5} < \frac{5x}{5}$ (Eşitsizliğin her iki yanı 5 ile bölünür.)

$12 < x$ bulunur. Buna göre 12. yıldan sonra kavak ağacının boyu çam ağacının boyundan uzun olur.

10. ÖRNEK

Bir haber kanalı, radyo haberciliği konusunda takım arkadaşları aramaktadır. Başvuru yapanlar 100 sorudan oluşan bir sınava alınmakta ve başarılı olanlar mülakata çağrılmaktadır. Sınav ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

- Sınavda ellişer sorudan oluşan dil bilgisi ve iletişim becerileri testleri vardır.
- Her dil bilgisi sorusunun doğru cevabı 3 puan, her iletişim becerisi sorusunun doğru cevabı 5 puan değerindedir.
- Her iki alanda, her yanlış cevap için 2 puan silinmektedir.
- Boş bırakılan soruların puanlamaya bir etkisi yoktur.
- 300 veya 300 den fazla puan alan kişiler başarılı sayılmaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Sınavda başarılı olmak için en az kaç soruya doğru cevap verilmesi gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dil bilgisi doğru cevap sayısı x, iletişim becerisi doğru cevap sayısı y olmak üzere $3x + 5y \geq 300$ eşitsizliğini sağlayan ve "x + y" toplamını en küçük yapan x ve y değerleri bulunmalıdır. Verilen eşitsizlikte 5y teriminin katsayısı daha büyük olduğundan y = 50 alınmalıdır.

$3x + 5 \cdot 50 \geq 300$ eşitsizliği çözülürse $3x + 250 \geq 300$, $3x \geq 50$ elde edilir.

$3x \geq 50$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x tam sayı değeri 17 dir. Dolayısıyla başarılı sayılmak için yapılması gereken en az doğru sayısı 50 + 17 = 67 bulunur. ($3 \cdot 17 + 5 \cdot 50 = 301$ puan alınır.)

b) İletişim becerileri testinde 45 doğru, 5 yanlış cevaplama yapan bir kişi dil bilgisi testinden 45 soruyu cevapladığına göre başarılı olmak için bu kişinin dil bilgisi testinden <u>en çok</u> kaç soruyu yanlış cevaplamış olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

İletişim becerileri testinden elde edilecek puan $45 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 215$ olur.
Dil bilgisi testinden yanlış cevaplanan soru sayısı x olsun. Doğru cevap sayısı 45 – x olacağından başarılı olmak için

$215 + 3 \cdot (45 - x) - 2 \cdot x \geq 300$

$215 + 135 - 3x - 2x \geq 300$

$350 - 5x \geq 300$ (Eşitsizliğin her iki yanına 5x eklenir.)

$350 \geq 300 + 5x$ (Eşitsizliğin her iki yanından 300 çıkarılır.)

$50 \geq 5x$ (Eşitsizliğin her iki yanı 5 ile bölünür.)

$10 \geq x$ olmalıdır. Dolayısıyla dil bilgisi testinden en çok 10 soruyu yanlış cevaplamış olabilir.

11. ÖRNEK

Sefa, evlere damacana su servisi yapan babasına yardım etmek için kamyonete her biri 19 kg ağırlığında sulardan yükleyecektir. Babası 75 kg, kendisi 60 kg ve kamyonetlerinin azami yük taşıma kapasitesi 1250 kg olduğuna göre Sefa'nın kamyonete <u>en çok</u> kaç adet damacana su yükleyebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sefa, kamyonete x tane damacana su yüklediğinde babası ve kendisi ile birlikte toplam ağırlıkları 75 + 60 + 19x olur. Kamyonete en fazla 1250 kg ağırlığında yük yüklenebildiğinden

$135 + 19x \leq 1250$ eşitsizliğini sağlayan x değeri bulunmalıdır.

$135 + 19x - 135 \leq 1250 - 135$ (Eşitsizliğin her iki yanından 135 çıkarılır.) $19x \leq 1115$

$\frac{19x}{19} \leq \frac{1115}{19}$ (Eşitsizliğin her iki yanı 19 ile bölünür.)

$x \leq \frac{1115}{19}$

$$\begin{array}{r|l} 1115 & 19 \\ -\ 95 & 58 \\ \hline 165 & \\ -\ 152 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

1115 sayısının 19 ile bölümünden elde edilen bölüm 58, kalan 13 olduğundan en fazla 58 adet damacana yüklenebilir.

3 SIRA SİZDE

Yük taşıma kapasitesi 730 kg olan bir taşıta 60 kg lık kolilerden en fazla kaç tane yüklenebileceğini bulunuz.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3
	$Ç = (-\infty, -6]$	54	12

Alıştırmalar

1. $-3 < \frac{x}{-2} < 2$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

2. $x - 2 \leq 2x + 5$ eşitsizliğini sağlayan en geniş aralığı bulunuz.

3. $2 < x < 5$ olmak üzere $y = 2x - 3$ olduğuna göre y nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

4. Anneler Günü'nde Kübra, Nevin ve Adem adında üç kardeş biriktirdikleri parayla annelerine bir kolye almak istemektedir. Adem 700 TL, Kübra ise Nevin'in verdiği paranın üç katını vermiştir. Verilen paralar tam sayı ve kolyenin fiyatı 1800 TL den fazla olduğuna göre Nevin'in en az kaç TL verdiğini bulunuz.

5. A ve B şehirleri arasındaki toprak ve asfalt olmak üzere farklı iki yoldan sabit x km/sa. hız ile gidildiğinde yolların uzunluğunu veren denklemler aşağıdaki gibidir.
Asfalt yolun uzunluğu: $(2x + 120)$ km
Toprak yolun uzunluğu: $(5x - 60)$ km
Asfalt yolun uzunluğu tam sayı ve asfalt yol toprak yoldan daha kısa olduğuna göre asfalt yolun en az kaç km olduğunu bulunuz.

6. Her 4 yanlış cevap için bir doğru cevabın silinerek netin hesaplandığı bir sınavda, başarılı sayılmak için en az 80 net yapmak gerekmektedir. 120 sorudan oluşan bu sınavda 24 yanlış cevabı olan bir kişinin başarılı olması için en az kaç doğru cevabı olması gerektiğini bulunuz.

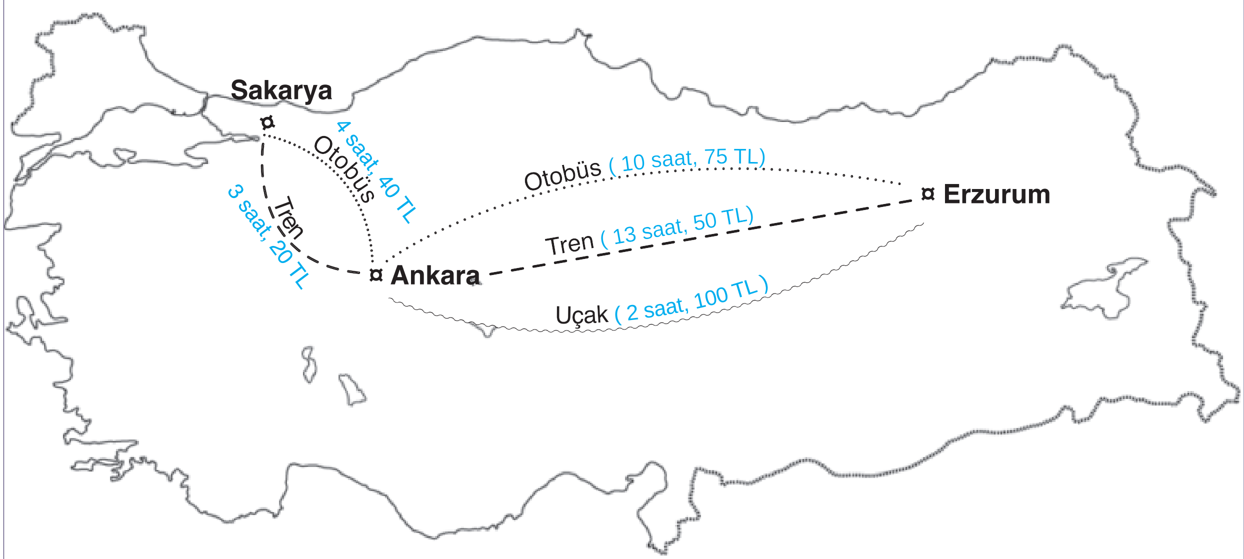
7. Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan bir ailede anne ile babanın yaşlarının toplamı 62 ve çocukların yaşlarının toplamı 24 tür. Buna göre en az kaç yıl sonra bu çocukların yaşlarının toplamının, anne ile babanın yaşlarının toplamından fazla olacağını bulunuz.

8. Bir ilin Sosyal Hizmetler Müdürlüğü tarafından her hafta yaşlı veya kimsesizlerin evine gidilerek ev temizliği ve sağlık kontrolü yapılmaktadır. Bu hafta bakılan yaşlı erkek sayısı, yaşlı kadın sayısının iki katının 7 eksiğidir. Erkek sayısı, kadın sayısından çok olmadığına göre bu hafta bakılan kadın sayısının en fazla kaç olduğunu bulunuz.

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7	8
	9	[−7, ∞)	5	276	241	86	20	7

3.2.
Bilinçli Tüketici Aritmetiği

Hazırlık Çalışması



Yolculuk Yönü	Sakarya-Ankara		Ankara-Erzurum	
Maliyet-Yolculuk Süreleri	Maliyeti	Yolculuk süresi	Maliyeti	Yolculuk süresi
Otobüs	40 TL	4 saat	75 TL	10 saat
Tren	20 TL	3 saat	50 TL	13 saat
Uçak	-	-	100 TL	2 saat

Yukarıdaki harita üzerinde ve tabloda Sakarya, Ankara ve Erzurum illerinin konumları, bunlar arasındaki farklı ulaşım seçenekleri, ulaşım süreleri ve ulaşım maliyetleri verilmiştir. Sakarya'dan Ankara'ya uğrayıp Erzurum'a gitmesi gereken biri için aşağıda verilen problemleri, verilen bilgiler ışığında sınıfınızda cevaplamaya çalışınız.

1. En düşük maliyet ile yolculuk yapılırsa yolculuğun kaç saatte gerçekleşeceğini bulunuz.

2. En kısa sürede yolculuk yapılırsa yolculuğun maliyetinin kaç TL olacağını bulunuz.

3. Yolculuk süresinin 15 saati geçmemesi koşulu ile en düşük maliyetli yolculuğun kaç TL ye gerçekleşebileceğini bulunuz.

3.2.1. Gelirler ve Giderler Göz Önüne Alınarak Birey, Aile ve Kurum Bütçesi Oluşturma

Bütçe

Gelecekte belirli bir dönemde gerçekleşmesi beklenen tahminî gelirler ve tahminî giderler arasında denge oluşturmak amacı ile hazırlanan planlamalara bütçe denir. Devletler, kurumlar, şirketler, aileler, kişiler bütçe hazırlayarak gelir ve giderleri dengede tutabilir ve kaynaklarını verimli bir şekilde kullanabilir.

Harcamalar ve gelirler belirlenirken geçmiş dönem harcamalarından ve gelir verilerinden faydalanılır. Gelecekteki muhtemel harcamalar ve gelirler de dikkate alınır.

Bütçe, tahminsel değerler olduğundan değişen ihtiyaçlara ve şartlara göre yeniden düzenlenip değiştirilebilir. Bütçe hazırlamanın bazı olumlu yanları aşağıda verilmiştir.

Bütçe;

- Tasarruf ve yatırım yapmaya olanak tanır.
- Gelir gider dengesizliği varsa sebeplerini ortaya çıkarmaya yardımcı olur.
- Borçlanma ihtiyaçlarını makul sınırlar içinde tutmayı sağlar.
- Bireylerin bilinçli tüketim alışkanlığı kazanmasına yardımcı olur.
- Değişen ekonomik değerler hakkında farkındalık sağlar.

Terimler ve Kavramlar

Bütçe, denk bütçe, açık bütçe, artırımlı bütçe, tasarruf, gelir, gider, birey bütçesi, aile bütçesi, kurum bütçesi, proje bütçesi

1. ÖRNEK

Aşağıda verilen deyim ve atasözlerinden hangisi tasarrufun faydaları ile çelişir?

A) Sakla samanı, gelir zamanı B) Ayağını yorganına göre uzat C) Har vurup harman savurmak
D) Ak akçe, kara gün içindir E) Damlaya damlaya göl olur

ÇÖZÜM

Verilen deyim ve atasözlerinin anlamlarına bakıldığında A, B, D, E seçenekleri tasarruf ve dikkatli harcama ile ilgilidir. Ancak C seçeneğindeki ifade hesapsızca harcayarak tüketmek, bol bol harcayıp bitirmek anlamındadır ve tasarruf ile çelişir. Dolayısıyla doğru cevap C seçeneğidir.

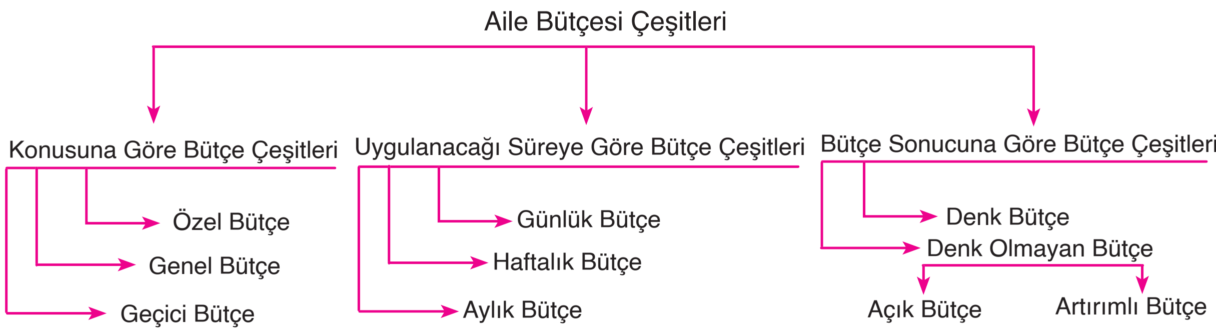
Birey ve Aile Bütçesi

Bir bireyin gelir ve giderleri arasında denge oluşturup önceliklerine göre harcamalarına yön vermesini içeren bütçeye birey bütçesi denir.

Bir ailenin gelir ve giderlerini belirleyip buna göre yaşam standardını oluşturmasını konu alan bütçeye aile bütçesi denir. İyi bir planlama, ailenin kaynaklarını en iyi şekilde değerlendirmesini ve uzun süreli amaçlarını gerçekleştirmesini sağlar. Gerçekçi, esnek ve bireylerin gereksinimlerine cevap verecek nitelikte hazırlanan bir aile bütçesi, uygulamada başarılı olacaktır.

Aile Bütçesi Çeşitleri

Bir aile bütçesi uygulanacağı süreye, konuya ve gerçekleşme sonucuna göre sınıflandırılabilir.



A. Konusuna Göre Bütçe Çeşitleri

Özel Bütçe: Sıra dışı bir durumdan dolayı oluşturulmuş bütçelere özel bütçe denir. Örneğin aileden birinin evliliği söz konusu olduğunda hazırlanan bütçe.
Genel Bütçe: Zamana göre sınıflandırılmış bütün bütçe türlerinin ailenin tüm gelir ve giderlerini kapsayacak şekilde hazırlanmasıyla oluşturulan bütçeye genel bütçe denir.
Geçici Bütçe: Geçici bir durum için hazırlanan bütçelere geçici bütçe denir. Örneğin hafta sonu tatili için yapılan bütçe.

B. Uygulanacağı Süreye Göre Bütçe Çeşitleri

Aylık Bütçe: En sık kullanılan bütçe türüdür. Bir ailenin aylık giderleri; barınma, ulaşım, gıda, iletişim, sosyal faaliyetler şeklinde düşünülebilir. Aylık giderleri ve aylık gelirleri içerecek şekilde hazırlanan bütçelere aylık bütçe denir.
Haftalık Bütçe: Aylık gelirden, sürekli giderler çıkarılır ve kalan 4 e bölünerek haftalık gelir bulunur. Bu şekilde elde edilen bütçeye haftalık bütçe denir. Bir olumsuzluk görüldüğünde harcamalar kontrol edilir.
Günlük Bütçe: Haftalık bütçeye benzer bir hesapla günlük harcama ve gelir verilerini içeren bütçeye günlük bütçe denir.

C. Bütçe Sonucuna Göre Bütçe Çeşitleri

Denk Bütçe: Bütçe dönemi sonunda gerçekleşen gelir ve gider miktarının eşit olduğu bütçeye denk bütçe denir. Gelirler ve giderler eşit değilse denk olmayan bütçe olarak adlandırılır.
Açık Bütçe: Gerçekleşen gelir ve gider miktarının eşit olmadığı, gelirin az ve tüketimin fazla olduğu bütçeye açık bütçe denir.
Artırımlı Bütçe: Gerçekleşen gelir ve gider miktarının eşit olmadığı, gelirin fazla ve tüketimin az olduğu bütçeye artırımlı bütçe denir. Bu durumda tasarruf edilmiş olur.

Bütçe Oluşturmanın Aşamaları

Bütçe oluşturmak için öncelikle ekonomik amaçlar belirlenir. Bu amaçlar, kabul edilebilir, ulaşılabilir, birbiriyle uyumlu ve iyi tanımlanmış olmalıdır. Amaçlar belirlendikten sonra, tahminî gelir ve giderler belirlenerek bunların analizi yapılır. Gelir ve giderlere uygun plan yapılır ve yazılır. Planlanan bütçe, gerçeğe yakın olup olmadığı incelendikten sonra uygulamaya konulmalıdır.

Tahminî Gelirler ve Giderler

Tahminî Gelirler: Gelir, bir ailenin eline geçen maddi değerlerin tümüdür. Aile geliri; belirli ve sabit gelirler, değişen gelirler olmak üzere iki grupta toplanabilir.

1. Belirli ve Sabit Gelirler: Belirli bir süre içinde devamlı olarak elde edilen gelirlerdir. Maaş, ev kirası vb. para gelirleri sabit gelirlerdir. Ayrıca belli süre içinde yapılan ticari faaliyetlerden elde edilen ticari kazançlar da sabit gelirlerdir.
2. Değişken Gelirler**:** Süresi ve miktarı belli olmayan gelirlerdir. Örneğin mesai dışı yapılan ek çalışmalardan elde edilen gelirler değişken gelirdir.

Tahminî Giderler: İhtiyaçları karşılamak üzere yapılan harcamalara gider denir. Giderler, aile bireylerinin istek ve ihtiyaçları dikkate alınarak belirlenir.

2. ÖRNEK

Aşağıda verilen tabloda bir ailenin bütçe planı görülmektedir. Bu bütçenin hangi bütçe sınıfında yer aldığını bütçenin gerçekleşme sonucuna göre belirleyiniz.

Belirli ve Sabit Gelirler: 3000 TL		
Değişken Gelirler: 500 TL		
Ailenin İstek ve İhtiyaçları	**İstek ve İhtiyaçların Tahminî Tutarı**	**İstek ve İhtiyaçların Gerçek Miktarı**
Yiyecek	600	700
Giyecek	200	250
Ulaşım giderleri	250	250
Taksitler	700	700
Sağlık giderleri	100	50
Eğitim giderleri	200	150
Kişisel harcamalar	200	250
Kira	700	700
Faturalar	400	350
Beklenmeyen giderler	150	50
TOPLAM	3500	**3450**

ÇÖZÜM

Tabloda verilen değerlere göre
Gelirler toplamı 3000 + 500 = 3500 TL dir.
Gerçekleşen giderlerin toplamı, 700 + 250 + 250 + 700 + 50 + 150 + 250 + 700 + 350 + 50 = 3450 TL dir.
Bütçe dönemi sonunda gerçekleşen gelir ve giderler, toplamları eşit olmadığından denk olmayan bir bütçedir. Gelirler toplamı, giderler toplamından büyük olduğundan artırımlı bütçeye örnektir.

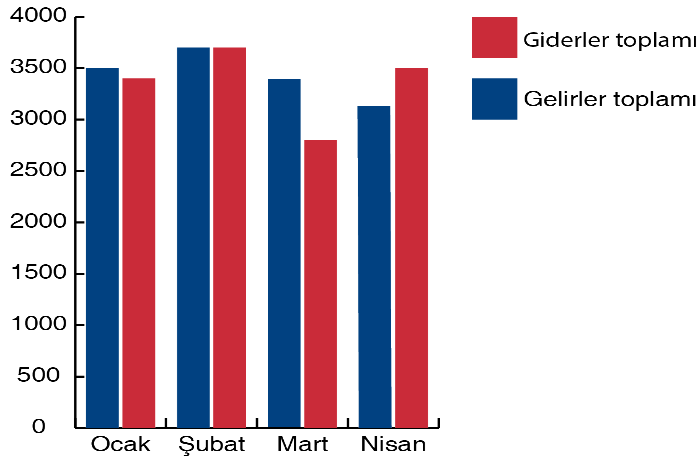
1 SIRA SİZDE

Geliriniz ile haftalık bütçe oluşturarak bütçe sonucunu ailenizle paylaşınız.

3. ÖRNEK

Yanda verilen tabloda bir ailenin aylık bütçelerinin 4 aylık sonuçları verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerden kaçının doğru olduğunu bulunuz.

a) Ocak ayı bütçesi, artırımlı bütçedir.
b) Şubat ayı bütçesi, denk bütçedir.
c) Bütçe açığı, en fazla mart ayında gerçekleşmiştir.
ç) Nisan ayı bütçesi, açık bütçedir.
d) En fazla tasarruf mart ayında gerçekleşmiştir.



ÇÖZÜM

Grafik incelendiğinde ocak ayında gelirler toplamı, giderler toplamından fazla olduğundan artırımlı bütçedir. a seçeneği doğru olur. Şubat ayında gelirler toplamı, giderler toplamına eşit olduğundan denk bütçedir. b seçeneği doğrudur. Mart ayında gelirler toplamı, giderler toplamından fazla olduğundan artırımlı bütçedir, dolayısıyla c seçeneği yanlıştır. Nisan ayında giderler toplamı, gelirler toplamından fazla olduğundan açık bütçedir ve ç seçeneği doğrudur. Gelirler toplamı ile giderler toplamı arasındaki farkın en fazla olduğu ay mart ayı olduğundan d seçeneği doğrudur. Verilen ifadelerden 4 ü doğrudur.

Proje Bütçesi

Projenin uygulanmaya başlanacağı tarihten sonlanacağı tarihe kadar mali kaynakların nasıl kullanılacağını ve kaynakların harcama kalemlerine göre nasıl dağıldığını gösteren tahminî tablolara proje bütçesi denir.

Proje bütçesinin gelirleri; proje sahibinin katkısı, destek veren kurum ve şirketler, gönüllü kişiler olabilir. Proje bütçesinin giderleri; personel, ulaşım, iletişim, yazılım, sabit kıymet ve demirbaş giderleri gibi unsurlardan oluşur. Ayrıca maliyet hesaplamaları için genellikle piyasa araştırması yapılır.

BİLİYOR MUYDUNUZ?

31 Ekim, **Dünya Tasarruf Günü** olarak anılmaktadır. Tasarruf etmenin insanlar ve ülke ekonomileri için ne kadar önemli olduğunu vurgulamak amacıyla 1924 yılında World Savings Banks Institute [(Vörld Seyving Benks İnstitü), (WSBI-Dünya Tasarruf Bankaları Enstitüsü)] adlı bir enstitü kurulmuştur. O tarihten bu yana da Dünya Tasarruf Günü'nün anılması bir gelenek hâlini almıştır.

4. ÖRNEK

Birkaç üniversite öğrencisi, TÜBİTAK (Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu) tarafından düzenlenen "Kendi Robotunu Tasarla" adlı yarışmaya katılmak istemektedir. Bir teknoloji firması, hazırladıkları proje için mali kaynak araştırması yapan öğrencilere destekleyici (sponsor) olmayı kabul etmiş ve toplam maliyetin %75 ini karşılayacağını belirtmiştir. Gelir ve gider kalemleri aşağıda verilmiştir.

Gelirler:

- TÜBİTAK tarafından yapılan destek 5000 TL
- Üniversitenin ARGE katkısı 4000 TL
- Destekleyici (sponsor) firmanın maliyetin %75 ini karşılayacağına dair anlaşma
- Öğrencilerin kendi katkıları

Giderler:

- Elektronik araç ve gereç (mikrodenetleyiciler, sensörler, soketler vb.) 15 000 TL
- Yazılım10 000 TL
- Ulaşım 700 TL
- İletişim 500 TL
- Robot platformları ve gövdeleri 2500 TL
- Tasarım 1300 TL
- Diğer giderler 10 000 TL

Bu projenin denk bütçesini oluşturmak için öğrencilerin kendi katkılarının kaç TL olması gerektiğini bularak bütçeyi tablo şeklinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Giderler toplamı 15 000 + 10 000 + 700 + 500 + 2500 + 1300 + 10 000 = 40 000 TL dir.

Giderler toplamı 40 000 TL olduğundan destekleyici firma $40\,000 \cdot \frac{75}{100} = 30\,000$ TL ödeme yapacaktır.

Gelirler toplamı 30 000 + 4000 + 5000 = 39 000 TL olduğundan öğrencilerin 1000 TL katkı yapması gerekir. Aşağıda bütçenin tablosu verilmiştir.

Proje Gider Kalemleri	Tutar (TL)	Proje Gelir Kalemleri	Tutar (TL)
Elektronik araç ve gereç	15 000	TÜBİTAK desteği	5000
Yazılım	10 000	Üniversitenin desteği	4000
Ulaşım	700	Destekleyici (sponsor) desteği	30 000
İletişim	500	Öğrencilerin kendi katkıları	1000
Robot platformları ve gövdeleri	2500		
Tasarım	1300		
Diğer giderler	10 000		
TOPLAM	**40 000**		**40 000**

BİLİYOR MUYDUNUZ?

TİSVA (Türkiye İsrafı Önleme Vakfı) verilerine göre ülkemizde her gün yaklaşık 125 milyon ekmek üretilmekte ve bunun 6 milyonu çöpe atılmaktadır. Çöpe atılan ekmeklerin maddi karşılığı ile her gün birkaç tane okul veya hastane yaptırılabilir. Oysa ekmekler buzdolabının dondurucu kısmında 3 ay kadar tazeliğini koruyacak şekilde saklanabilir.

Kurum Bütçesi

Herhangi bir kurumun veya şirketin kaynaklarını verimli kullanmak ve yatırım politikalarını belirlemek amacıyla yaptığı bütçeye kurum bütçesi denir. Türkiye'de kamu hizmetleri; merkezî yönetim bütçesi, sosyal güvenlik kurumlarının bütçesi ve mahallî idare bütçeleri aracılığı ile yürütülür. Örneğin aşağıdaki tabloda TBMM'ye sunulmak üzere Millî Eğitim Bakanlığı tarafından hazırlanan Türkiye'nin 2006 - 2016 yılları arasındaki eğitim bütçesi verilmiştir.

T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI 2006 - 2016 EĞİTİM BÜTÇESİ

Yıllar	MEB	YÖK ve Üniversiteler	ÖSYM	Toplam Eğitim Bütçesi
2006	16.568.145.500	5.846.822.761	171.921.000	22.586.889.261
2007	21.355.634.000	6.586.692.000	191.717.000	28.134.043.000
2008	22.915.565.000	7.318.284.650	152.077.000	30.385.926.650
2009	27.446.778.095	8.772.719.225	150.170.000	36.369.667.320
2010	28.237.412.000	9.355.457.600	150.865.000	37.743.734.600
2011	34.112.163.000	11.503.927.500	160.192.000	45.776.282.500
2012	39.169.379.190	12.743.603.000	232.559.000	52.145.541.190
2013	47.496.378.650	15.227.760.500	291.996.000	63.016.135.150
2014	55.704.817.610	16.939.010.000	359.980.000	73.003.807.610
2015	62.000.248.000	18.493.252.000	364.239.000	80.857.739.000
2016	76.354.306.000	23.590.696.000	445.303.000	100.390.305.000

Kaynak: https://sgb.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2016_03/25025608_2016yiligenelkurulsu-nu_25.03.2016.pdf (Erişim: 22.12.2017)

5. ÖRNEK

Gelirler	Miktar (TL)	Giderler	Miktar (TL)
Üyelerin bağışları	240 000	Yönetim giderleri	160 000
Üye aidatları toplamı (yıllık)	-	Yapılan yardımlar	600 000
Menkul kıymet satış kârları	340 000	Olağan dışı giderler	120 000
Temettü gelirleri	30 000		
TOPLAM			

Yukarıda engellilere yardım etmek amacıyla kurulmuş 1500 üyesi olan bir vakfın yıllık gelir ve gider kalemleri verilmiştir. Buna göre vakfın bütçesinin açık vermemesi için vakıf üyelerinden toplanması gereken üyelik aidatının aylık kaç TL olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Vakfın giderlerinin toplamı 160 000 + 600 000 + 120 000 = 880 000 TL dir.
Vakfın üyelerden topladığı aidat dışındaki gelirleri toplamı 240 000 + 340 000 + 30 000 = 610 000 TL dir.
Bütçenin açık vermemesi için üyelerden toplanması gereken yıllık aidat toplamı
en az 880 000 – 610 000 = 270 000 TL olmalıdır. Yıllık toplanması gereken aidat miktarı 12 ile bölünürse aylık toplanması gereken aidat miktarı $\frac{270\,000}{12} = 22\,500$ TL bulunur.

1500 üyesi olan vakfın her bir üyeden toplaması gereken aidat miktarı aylık $\frac{22\,500}{1500} = 15$ TL bulunur.

ANAHTAR BİLGİ

Bir ülke sınırları içerisinde serbest dolaşımda bulunan malların ve hizmetlerin başka ülkelere satılmasına ihracat denir. Herhangi bir mal veya hizmetin yurt dışından satın alınmasına ithalat denir.

Bir ülkenin ürettiği malların ihraç sonucu getirdiği gelirin, ülkenin ithal ettiği mal ve hizmetlerden az olması durumuna cari açık denir.

6. ÖRNEK

Aşağıda verilen tabloda 2016 yılı içerisinde Türkiye'nin bazı ülkelerle yaptığı dış ticaret miktarları verilmiştir. Buna göre hangi ülkelerle yapılan ticaret faaliyetleri, cari açığı azaltacak şekilde etki gösterir?

Ülke Adı	İhracat (Dolar)	İthalat (Dolar)	Cari Durum
Fransa	6.022.485.402	7.364.715.497	Cari açık
Hollanda	3.589.431.870	3.000.336.335	Cari fazla
Almanya	13.998.653.115	21.474.989.265	Cari açık
İtalya	7.580.836.964	10.218.386.785	Cari açık
İngiltere	11.685.790.237	5.320.236.686	Cari fazla
Finlandiya	292.055.800	942.114.099	Cari açık
Azerbaycan	1.285.127.038	278.131.382	Cari fazla
Irak	7.636.669.605	836.297.676	Cari fazla
İran	4.966.175.518	4.699.776.693	Cari fazla
Filistin	94.372.091	3.363.875	Cari fazla
Pakistan	346.896.045	263.354.035	Cari fazla

Kaynak: http://www.tuik.gov.tr/UstMenu.do?metod=temelist (Erişim: 22.12.2017)

ÇÖZÜM

Cari fazlası gerçekleşen ülkelerde ihracat miktarı, ithalat miktarından fazla olduğundan cari açığı azaltacak şekilde etki yapmıştır. Dolayısıyla Hollanda, İngiltere, Azerbaycan, Irak, İran, Filistin ve Pakistan ile yapılan ticaret, cari açığı azaltmaktadır.

2 SIRA SİZDE

20 dairelik bir apartmanın ortak giderleri; kapıcı aylığı 2000 TL, asansör bakım ücretleri aylık 200 TL, ortak alanların elektrik gideri 70 TL, bahçe bakım sulama giderleri 130 TL şeklindedir. Bu apartmanın aylık denk bütçesini oluşturarak daire başına toplanması gereken aidatı hesaplayınız.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2
	Haftalık Bütçeniz	120 TL

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?
   A) Aile bütçesini planlamada, artırım yapmak esastır.
   B) Aileler artırımlarını değerlendirirken artırımların değer kazanmasını ve kendilerine en fazla faydayı sağlamasını hedefler.
   C) Ailenin istek ve ihtiyaçlarını saptamak bütçe planlamada ilk adım olmalıdır.
   D) Aile, artırımlarını yatırım yaparak değerlendirebilir.
   E) Aile bütçesi planlamada aile bireylerinin ihtiyaçlarından daha çok gelirler ve giderler dikkate alınır.

2. Aşağıdaki boşluklara uygun kelimeyi yazınız.
   a) Gelir ve giderlerin eşit olduğu bütçeye .... bütçe denir.
   b) Gelirin giderden az olduğu bütçeye .... bütçe denir.
   c) Gelirin giderden fazla olduğu bütçeye............. bütçe denir.
   ç) Bir bireyin gelir ve giderleri arasında denge oluşturup önceliklerine göre harcamalarına yön vermesini içeren bütçeye .... bütçesi denir.

3. Aşağıda bir ailenin aylık giderleri verilmiştir. Bu ailenin, bütçesinde aylık 500 TL artırım yapabilmesi için gelirinin kaç TL olması gerektiğini bulunuz.

Gider Çeşitleri	Gider (TL)
Yiyecek	500
Ulaşım giderleri	250
Taksitler	500
Sağlık giderleri	100
Eğitim giderleri	200
Kişisel harcamalar	200
Kira	550
Faturalar	200

4. Devlet tüm bireysel emeklilik katılımcılarına, aylık ödedikleri katkı payının %25 i oranında ek katkı sağlamaktadır. 10 yıl boyunca her ay 200 TL yatırmayı düşünen Akif Bey'in bu süre sonunda devlet katkısı ile beraber kaç TL birikim yapacağını bulunuz.

5. Artırımlarını bankada altın hesabında biriktiren Melek Hanım'ın 4 yıla ait banka hesap bilgileri tabloda verilmiştir. Buna göre hangi yıllar arasında Melek Hanım'ın bütçesinin en fazla artırıma sahip olduğunu bulunuz.

YIL	2011	2012	2013	2014
Altın Hesabı (gr)	1	5	7	8

6. Aşağıda bir ailenin bir aylık bütçesi verilmiştir. Bu ay sonunda bütçe açığı vermek istemeyen ailenin gider kalemlerinden öncelikli olarak hangisini gözden geçirmesi beklenir?

Babanın Aylığı: 1700 TL	
Annenin Aylığı: 1800 TL	
Ailenin İstek ve İhtiyaçları	**Gider (TL)**
Yiyecek	600
Giyecek	250
Ulaşım giderleri	250
Taksitler	700
Sağlık giderleri	100
Eğitim giderleri	600
Kira	500
Faturalar	250
Hafta sonu şehir dışı tatil planı	600
TOPLAM	

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	E	a) Denk b) Açık c) Artırımlı ç) Birey	3000	30 000	2011-2012	Tatil planı

3.2.2. Seyahatlerde Mümkün Olan Alternatifleri Karşılaştırma

Küreselleşen dünyada, teknolojinin getirdiği imkânlar ile birlikte uzaklık sınırlarının kalkması, insanların çok daha fazla seyahat etmesine olanak tanımaktadır. Seyahatler iş veya tatil amacıyla da olsa her ikisinde de iki unsur ön plana çıkmaktadır. Bunlar maliyet ve zamandır. İyi planlanmamış bir seyahatte istenenleri gerçekleştirecek zaman bulunamayabilir veya mali açıdan zor durumda kalınabilir.

Bu bölümde seyahatlerin maliyet analizini yapıp alternatifler arasından uygun olanı seçme ve zamanı verimli kullanma becerilerinizi örnekleri inceleyerek geliştireceksiniz.

Terimler ve Kavramlar

Seyahat planı, maliyet analizi, zaman çizelgesi

1. ÖRNEK

Rize'de bir okulun öğrencileri, Erzurum'da bulunan Nene Hatun Tarihî Millî Parkı'nı ziyaret etmeyi planlamaktadır. Ziyarete toplam 160 öğrenci katılacaktır. Ulaşım araçları ile ilgili ücret ve araçların kapasiteleri yanda tablo hâlinde verilmiştir. Gezinin ulaşım maliyetinin en az olması için hangi araçların kiralanması gerektiğini bulunuz.

	Bir Aracın Kiralama Ücreti	**Aracın Yolcu Kapasitesi**
Otobüs	2600 TL	50
Minibüs	900 TL	15

ÇÖZÜM

Öncelikle her bir aracın dolu olması durumunda kişi başı maliyet bulunur.

Kişi başı maliyet $= \dfrac{\text{aracın kiralama ücreti}}{\text{yolcu sayısı}}$ olduğundan otobüsün kişi başı maliyeti $\dfrac{2600}{50} = 52$ TL ve minibüsün kişi başı maliyeti $\dfrac{900}{15} = 60$ TL olur.

İlk bakışta otobüs daha uygun görünebilir ancak 160 öğrenci için 4 otobüs kiralamak gerekir ki 40 koltuk boş kalacağından bu da maliyeti artırır.

Maliyeti düşük olan otobüslerden, otobüsler dolu olacak şekilde mümkün olan en fazla sayıda kiralayıp geri kalan öğrenciler için minibüs kiralamak en uygun seçim olacaktır.

Aşağıdaki tabloda farklı kiralama seçenekleri ve bunların maliyetleri verilmiştir.

Seçenekler	**Otobüs Sayısı**	**Minibüs Sayısı**	**Taşınabilecek Yolcu Sayısı**	**Toplam Maliyet**	**Kişi Başı Maliyet (160 kişi)**
4 otobüs kiralandığında	4	0	200	10 400 TL	65 TL
11 minibüs kiralandığında	0	11	165	9900 TL	61,87 TL
3 otobüs ve 1 minibüs kiralandığında	3	1	165	8700 TL	54,37 TL

Tabloya göre 54,37 TL kişi başı maliyet ile 3 otobüs ve 1 minibüs kiralamak en uygun tercih olacaktır.

2. ÖRNEK

Ankara'dan bir konferansa katılmak üzere Eskişehir'e gelen 4 üniversite öğrencisi, Eskişehir Otogarı'ndan Anadolu Üniversitesine gitmek istemektedir. Tramvay için kişi başı bilet ücreti 2,7 TL, kişi başı minibüs ücreti 3 TL dir. Taksilerin ücretlendirme tarifesi, taksimetre açılış ücreti 3 TL ve her 100 metre için 0,15 TL dir. Otogar ile üniversite arası mesafe 5 km olduğuna göre bu 4 arkadaşın üniversiteye en ekonomik şekilde ulaşmak için hangi aracı seçmesi beklenir?

ÇÖZÜM

Tramvay ile yolculuğun maliyeti $4 \cdot 2{,}7 = 10{,}8$ TL dir.
Minibüs ile yolculuğun maliyeti $4 \cdot 3 = 12$ TL dir.
Taksi ile yolculuğun maliyeti $3 + \frac{5000}{100} \cdot 0{,}15 = 10{,}5$ TL dir.
Buna göre en ekonomik seçenek taksi olduğundan öğrencilerin ulaşım aracı olarak taksiyi tercih etmeleri beklenir.

	Kişi Başı Ücret (TL)	Toplam Maliyet (TL)
Tramvay	2,7	10,8
Minibüs	3	12
Taksi	-	10,5

1 SIRA SİZDE

12 iş arkadaşı, işe gidiş gelişlerde bir servis ile anlaşmayı düşünmüşler ve 2 farklı turizm şirketinden teklif almışlardır. Anatur şirketi, yolcu sayısına bakılmaksızın haftada 7 gün olmak üzere aylık sabit 2500 TL istemiştir. Balatur şirketi ise her yolcu için günlük 10 TL istemiştir. İşçilerin iş programına göre günlük işe gidiş geliş yapan işçi sayısı yandaki tabloda gösterilmiştir. Toplam maliyeti eşit paylaşımlı olarak ödemeyi planlayan işçilerin hangi firma ile anlaşmaları daha ekonomik olacaktır? (1 ay 4 hafta olarak alınacaktır.)

Günler	İşe Giden İşçi Sayısı
Pazartesi	10
Salı	12
Çarşamba	10
Perşembe	8
Cuma	10
Cumartesi	6
Pazar	4

3. ÖRNEK

İş için İzmir'den Trabzon'a gidecek olan Zeynep, Ankara'da okuyan kardeşini de ziyaret etmek istemektedir. Kardeşiyle birlikte en az 5 saat zaman geçirmeyi planlayan ve 18.00 de yola çıkacak Zeynep'in ertesi gün 15.00 te Trabzon'da olması gerekmektedir. Bu şehirler arasındaki ulaşım seçenekleri, maliyeti ile birlikte tabloda verilmiştir. (Ankara Trabzon arası tren yolu ulaşımı yoktur.)

Yolculuk Yönü	İzmir-Ankara		Ankara-Trabzon	
Maliyet - Yolculuk süreleri	Maliyeti	Yolculuk süresi	Maliyeti	Yolculuk süresi
Otobüs	60 TL	8 saat	75 TL	9 saat
Tren	30 TL	12 saat	-	-
Uçak	120 TL	1 saat	100 TL	2 saat

Verilenlere göre Zeynep'in zamanında ve en az maliyet ile yolculuğunu tamamlamak için hangi ulaşım araçlarını tercih etmesi gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen bilgilere göre Zeynep, İzmir'den ayrıldıktan 21 saat sonra Trabzon'da olmalıdır. Zeynep, kardeşinin yanında en az 5 saat zaman geçirmek istediğinden yolculuk süresi 16 saatten fazla olamaz. Yandaki tablo incelendiğinde yolculuk süresi istenilen koşullara uygun ve maliyeti en düşük ulaşım araçlarının tren ve uçak olduğu görülür.

Kullanılabilecek Ulaşım Araçları	Yolculuk Süresi (Saat)	Maliyet (TL)
Otobüs - Otobüs	8 + 9 = 17	60 + 75 = 135
Otobüs - Uçak	8 + 2 = 10	60 + 100 = 160
Uçak - Otobüs	1 + 9 = 10	120 + 75 = 195
Uçak - Uçak	1 + 2 = 3	120 + 100 = 220
Tren - Otobüs	12 + 9 = 21	30 + 75 = 105
Tren - Uçak	12 + 2 = 14	30 + 100 = 130

2 SIRA SİZDE

Bir yabancı dil eğitim programına katılmak üzere 4 günlüğüne şehir dışına gidecek olan Günay, uçak bileti almıştır. Evinden 20 km uzaklıktaki havaalanına kendi aracı ile giderse günlük 9 TL otopark ücreti ve 10 TL gidiş dönüş yakıt masrafı olacaktır. Günay, Genel Ağ'dan taksi ücret tarifesine baktığında taksimetre açılış ücretinin 5 TL ve her 100 metre için 0,25 TL olduğunu görmüştür. Gidişte taksi kullanması hâlinde dönerken de taksi kullanacak olan Günay'ın ekonomik bir tercih için hangi durumu seçmesi beklenir?

4. ÖRNEK

Ankara'dan İstanbul'a otomobil ile yolculuğun maliyeti 120 TL dir. Tren bileti fiyatları; tam bilet 35 TL, öğrenci bileti 30 TL dir. Buna göre anne, baba ve her biri öğrenci olan 3 çocuktan oluşan 5 kişilik bir ailenin, Ankara'dan İstanbul'a otomobil ile gitmesi durumunda kaç TL tasarruf edeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Aile, 2 yetişkin ve 3 okuyan çocuktan oluştuğundan tren ile yolculuğun maliyeti
$2 \cdot 35 + 3 \cdot 30 = 70 + 90 = 160$ TL olur.
Aile otomobil ile yolculuğu tercih ettiğinden $160 - 120 = 40$ TL tasarruf etmiş olur.

3 SIRA SİZDE

Urfa'dan Yozgat'a otomobil ile yolculuğun maliyeti 250 TL dir. Otobüs bileti fiyatı, 70 TL dir. Buna göre Urfa'dan Yozgat'a gidecek 3 kişilik bir ailenin hangi ulaşım şeklini seçmesinin daha ekonomik olacağını bulunuz.

Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3
	Balatur	Kendi Aracı	Otobüs

Alıştırmalar

1. Sinan ve Aydan çifti, 2 çocuğu ile Uşak'a 1 haftalığına (6 gece ve 7 gün) tatile gidecektir. Aile İstanbul'da ikamet etmektedir. Ailenin çocukları 4 ile 11 yaşlarındadır. İstanbul-Uşak arası uzaklık 400 km dir. Kalacakları otelin her şey dâhil gecelik konaklama fiyatı, kişi başı 110 TL olup 0-6 yaş grubu için ücretlendirme yapılmamaktadır. Ailenin aracı her kilometrede 0,30 TL yakıt harcamaktadır. Otel ücreti gecelik olarak ödenmektedir. Ailenin tatil bütçesinin <u>en az</u> kaç TL olması gerektiğini bulunuz.

2. Ayda 20 gün çalışan ve her gün 14 TL ile iş yerine gidiş dönüş yapan Meryem Hanım, iş yerine yürüme mesafesinde bir yerde ev bulmuş ve bu eve taşınmak istemektedir. Şu an oturduğu evin kirası 500 TL, taşınmak istediği evin kirası ise 600 TL dir ve diğer giderler aynıdır. Taşınması durumunda Meryem Hanım'ın aylık kaç TL tasarruf edeceğini bulunuz.

3. Yandaki tabloda bir fabrika ile anlaşan servis şirketinin günlük taşıması gereken yolcu sayısı verilmiştir. Servis şirketinin 16 kişilik olan servis araçları, her kilometrede 0,45 TL lik, 25 kişilik araçları ise kilometrede 0,65 TL lik yakıt harcamaktadır. Servisin güzergâhı gidiş dönüş toplam 60 km olduğuna göre bu servis şirketi <u>en düşük</u> maliyetli olacak şekilde araçlarını servise çıkardığında aylık (4 hafta) maliyetin kaç TL olacağını bulunuz.

Günler	Yolcu Sayısı
Pazartesi	30
Salı	15
Çarşamba	22
Perşembe	60
Cuma	40

4. Bayram tatilinde 3 günlüğüne ailesinin yanına gidecek olan Gülşah, uçak bileti almıştır. Gülşah'ın evinden 10 km uzaklıktaki havaalanına kendi aracı ile gitmesi hâlinde günlük 18 TL otopark ücreti ve 10 TL gidiş dönüş yakıt masrafı olacaktır. Gülşah, taksi ile gitmeyi tercih ettiğinde ise taksimetre açılış ücreti olarak 4 TL ve her 100 metre için 0,25 TL ödeyecektir. Ekonomik bir tercih yapmak isteyen Gülşah'ın hangi aracı seçmesi gerektiğini bulunuz.

5. Aşağıda verilen tabloda bazı iller arasındaki ulaşım seçenekleri, süresi ile birlikte verilmiştir. İzmir'den yola çıkıp sırası ile Ankara, Konya ve Antalya illerini gezip İzmir'e geri dönmeyi planlayan biri, yolculuk boyunca art arda aynı tür ulaşım aracına binmek istememektedir. Ayrıca her araca en az bir kez binmek istemektedir. Bu koşullara göre gezi boyunca yolculuğa ayrılacak toplam zamanın <u>en az</u> kaç saat olduğunu bulunuz.

Yolculuk Yönü	Tren	Uçak	Otobüs
İzmir → Ankara	12 saat	2 saat	7 saat
Ankara → Konya	2 saat	1 saat	4 saat
Konya → Antalya	5 saat	1 saat	6 saat
Antalya → İzmir	-	1,5 saat	5 saat

Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5
	2220	180	1164	Taksi	10

Öz Değerlendirme Formu

Bu ünite kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için **EVET**, kazanamadığınız beceriler için **HAYIR** kutucuğuna x işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

Değerlendirme Ölçütleri		EVET	HAYIR
1	Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözebilirim.		
2	Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ile ilgili gerçek hayat problemlerini çözebilirim.		
3	Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklem sistemini çözebilirim.		
4	Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler ile ilgili gerçek hayat problemlerini çözebilirim.		
5	Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözebilirim.		
6	Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler ile ilgili problemleri çözebilirim.		
7	Gelir ve giderleri göz önünde bulundurarak kendi bütçemi veya ailemin bütçesini oluşturabilirim.		
8	Gelir ve giderleri göz önünde bulundurarak bir projenin bütçesini oluşturabilirim.		
9	Seyahatlerin yaklaşık maliyet analizini yapabilirim.		
10	Gidilecek yere ilişkin bir zaman çizelgesi yapabilirim.		

Değerlendirme

Değerlendirme sonunda **HAYIR** cevaplarınızı gözden geçiriniz. Öğrendiklerinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz.

Ölçme ve Değerlendirme

A. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun kelimelerle doldurunuz.

1. $ax + b = 0$ eşitliğini sağlayan x gerçek sayısı $x = ...$ olur.

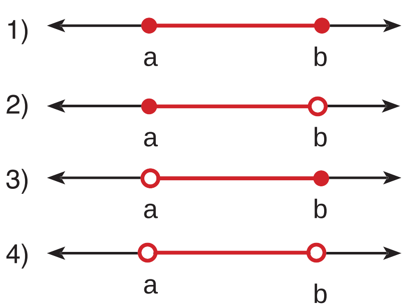
2. Denklem sistemlerinde denklemlerin birinden herhangi bir değişken çekilir ve diğer denklemde yerine yazılarak çözüme gidilirse bu yönteme .... yöntemi denir.

3. Gelecekteki belirli bir dönemde gerçekleşmesi beklenen tahminî gelirler ve tahminî giderler arasında denge oluşturmak amacı ile hazırlanan planlamalara .... denir.

4. Herhangi bir kurum veya bir şirketin kaynaklarını verimli kullanmak ve yatırım politikalarını belirlemek amacıyla yaptığı bütçeye .... denir.

B. Aşağıda numaralar ile verilen ifadeleri harfler ile verilen şıklarla doğru olacak şekilde eşleştiriniz.

5.



a) [a, b)
b) (a, b]
c) [a, b]
d) (a, b)
e) (b, a)
f) (b, a]

1.	2.	3.	4.

6. Aşağıda aile bütçe çeşitleri ve alt türleri verilmiştir. **Bunları doğru bir şekilde eşleştiriniz.**

1. Konusuna göre bütçe çeşitleri
2. Uygulanacağı süreye göre bütçe çeşitleri
3. Bütçe sonucuna göre bütçe çeşitleri

a) Denk bütçe
b) Geçici bütçe
c) Haftalık bütçe
d) Aylık bütçe

1.	2.	3.

C. Aşağıdaki açık uçlu soruların cevaplarını ilgili alana yazınız.

7. Maaşının %30 u ile ev kirasını ödeyen Murat'ın maaşına 800 TL zam yapıldıktan sonra kira ücreti 40 TL artmıştır.
Murat, yeni durumda maaşının %25 i ile ev kirasını ödeyebildiğine göre Murat'ın son durumdaki maaşının kaç TL olduğunu bulunuz.

8. Bir market "1 tane mendil alana ikincisi yarı fiyatına" kampanyası düzenlemiştir. 4 mendil alan bir kişi 6 TL ödemiştir.
Buna göre 1 mendilin kaç TL olduğunu bulunuz.

9. Rüveyda, babalar gününde babasına 76 TL ye bir gömlek almayı planlamaktadır. Bu sebeple günlük harçlığından, hafta içi günleri x TL hafta sonu günleri y TL para biriktirmektedir. $x + y = 5$ TL dir.
Rüveyda, 4 hafta sonra hediyeyi aldığına göre x in kaç TL olduğunu bulunuz.

10. Sokak hayvanlarını korumak amacı ile kurulmuş ve 150 üyesi bulunan bir yardımlaşma derneği, yaptığı harcamalar için üyelerinden her ay belli bir aidat toplamaktadır. Yıl içinde altıncı aydan sonra yapılan hesaplamada, yıl sonuna kadar bütçede 9000 TL açık olacağı tahmin edilmektedir.
Yıl sonunda açık oluşmaması için derneğin aidatlara kalan 6 ayda <u>en az</u> kaç TL zam yapması gerektiğini bulunuz.

11. Sakarya'da bir lise, öğrencilerine İstanbul'un tarihî mekânlarını tanıtmak amacıyla bir gezi planlamaktadır. 110 kişinin katılacağı bu gezi için turizm şirketlerinden alınan ücret tarifesi aşağıdaki tabloda verilmiştir.
Buna göre ulaşım maliyetinin en az olması için hangi araçlardan kaçar tane kiralanması gerektiğini bulunuz.

	Bir Aracın Kiralama Ücreti	Aracın Yolcu Kapasitesi
Otobüs	900 TL	45
Minibüs	500 TL	22

D. Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12. Gülay, 100 soruluk bir deneme sınavında 80 soruyu cevaplamıştır. Sınavda doğru cevapların sayısından yanlış cevapların dörtte biri çıkarılarak "net" hesaplanmaktadır. Gülay'ın yaptığı doğru soru sayısı ile yanlış soru sayısı yer değiştirirse net sayısı 50 azalmaktadır.
Buna göre Gülay kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 64 E) 70

13. Bir hastanenin servisinde çalışan Enes, servis binasının zemin katından 1, 2, 3, ve 4. katına, kütleleri 30 kg olan serum ve 50 kg olan antiseptik çözelti kolilerini aşağıda verilen bilgilere göre çıkaracaktır.

- 48 serum kolisi ve 48 antiseptik çözelti kolisi vardır.
- Her kata, her iki üründen eşit sayıda koli çıkarılacaktır.
- Her yüklemede serum ve çözelti kolisi sayısı aynı olacaktır.
- Asansörün taşıyabileceği yük kapasitesi 810 kg dır.
- Enes'in kütlesi 90 kg dır.

Verilen bilgilere göre Enes asansörü en az kaç kere yükleyerek ürünleri çıkarabilir?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 24

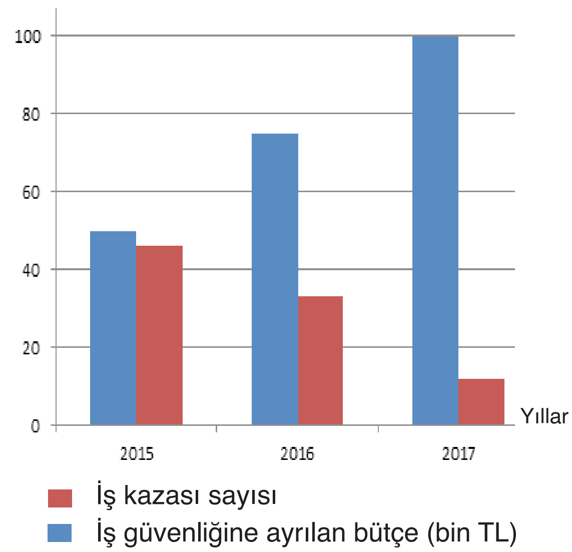
14. Ege öğretmen, kişi başına 3 dilim düşecek şekilde kek yapıp öğrencilerine getirmiştir. Ancak 4 öğrenci izinli olduğu için kişi başına 4 dilim düşmektedir.
Buna göre Ege öğretmenin sınıfının mevcudu kaçtır?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

15. Proje bütçesinin aşağıdaki giderlerinden hangisinin maliyet hesabı için piyasa araştırması yapılmaz?

A) Personel
B) Ulaşım
C) İletişim ve yazılım
D) Sabit kıymet ve demirbaş
E) Proje başvurusu

16. Aşağıdaki grafikte bir şirketin yıllara göre iş güvenliğine ayırdığı bütçe ile iş kazaları sayısı verilmiştir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) İş kazalarının sayısı ile iş güvenliğine ayrılan bütçe arasında bir bağıntı yoktur.
B) İş güvenliğine yapılan yatırım arttıkça iş kazalarının sayısı azalmıştır.
C) İş güvenliğine en fazla bütçe 2015 yılında ayrılmıştır.
D) En az iş kazası 2016 yılında olmuştur.
E) 2016 bütçesi 2015 bütçesinden azdır.

E. 17. ve 18. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız

Bir ailede anne, baba ve 3 çocuk bulunmaktadır. Bu aile fertlerinin yaşları ile ilgili olarak aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Aile bireylerinin yaşları toplamı 81 dir.
- Çocukların yaşları toplamının 3 katı, annenin yaşına eşittir.
- Küçük iki kardeşin yaşları toplamı, büyük kardeşin yaşından 1 fazladır.
- Babanın yaşı, en büyük çocuğun yaşının 7 katından 2 fazladır.

17. En büyük çocuğun yaşını bulunuz.

18. Babanın anneden kaç yaş büyük olduğunu bulunuz.

F. 19. ve 20. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız

Aşağıda A, B, C şehirleri arasındaki ulaşım seçenekleri, süre ve maliyetleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. Rıza, A şehrinden B şehrine uğrayıp C şehrine gidecek ve tekrar B şehrine uğrayarak A şehrine dönecektir.

Ulaşım Seçeneği	**A-B**		**B-C**	
	Maliyeti	Yolculuk Süresi	Maliyeti	Yolculuk Süresi
Otobüs	60 TL	7 saat	75 TL	9 saat
Tren	30 TL	12 saat	70 TL	13 saat
Uçak	120 TL	2 saat	100 TL	2 saat

19. Rıza'nın, en kısa sürede gidip, en uygun maliyet ile dönüşü gerçekleştirdiğinde toplam kaç TL ödeyeceğini bulunuz.

20. Rıza, her bir ulaşım aracını <u>en az</u> bir kere kullanmak şartıyla <u>en kısa</u> zamanda gidiş dönüş yapmaya çalışırsa Rıza'nın toplam gidiş dönüş maliyetini ve süresini hesaplayınız.

Cevap Anahtarı

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{-b}{a}$	Yerine koyma	Bütçe	Kurum bütçesi	1 - c 2 - a 3 - b 4 - d	1- b 2- c ve d 3- a	4000	2	3	10
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
2 otobüs 1 minibüs	C	B	C	E	B	5	4	320	290 TL 23 saat



GEOMETRİ

ÇEMBER VE DAİRE

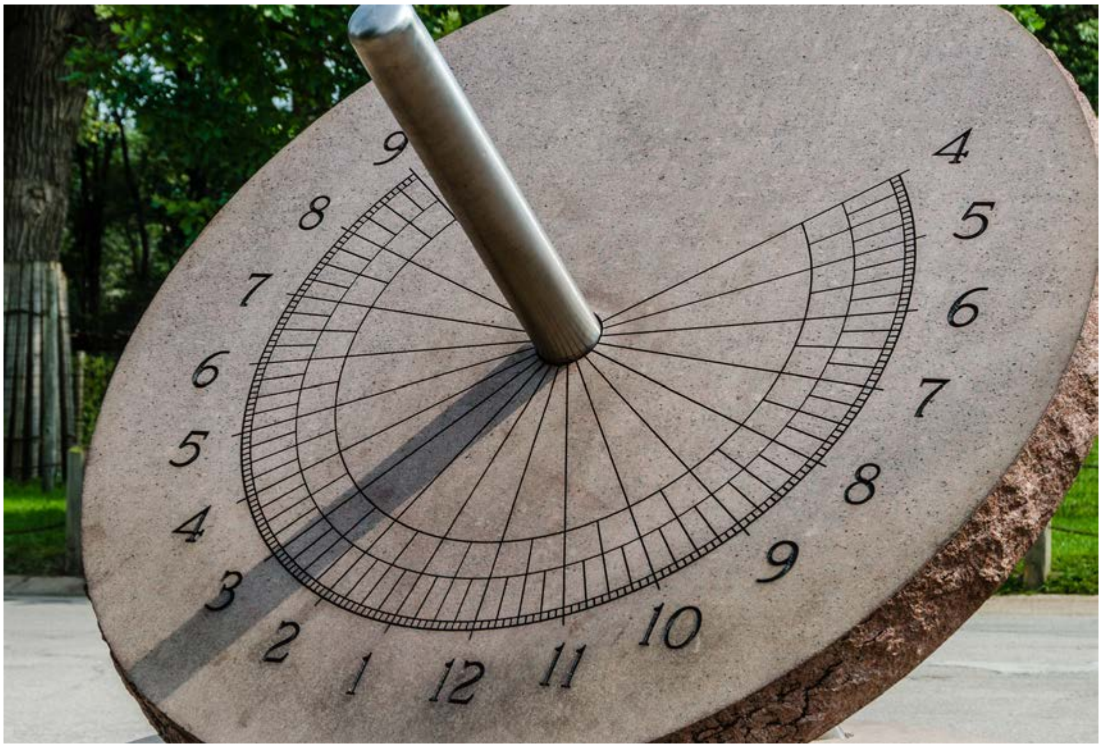
4. 1. Çemberin Temel Elemanları
    4. 1. 1. Çember ve Temel Elemanları
4. 2. Çemberde Açılar
    4. 2. 1. Çemberde Açılar ve Özellikleri
4. 3. Dairenin Çevresi ve Alanı
    4. 3. 1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları

4.

ÇEMBER VE DAİRE

Çember ve daire, matematiğin önemli alanlarından biri olan geometrinin temel konuları arasında yer alır. Çember ve daire ile ilgili bilgiler mimaride, inşaat alanında, adli tıpta vb. günlük hayatın birçok yerinde kullanılmaktadır.

Bu bölümde; çember, daire ve bunlar ile ilgili özellikler, günlük hayat problemleri ile ilişkilendirilerek temel bir yaklaşımla ele alınacaktır.



Neler Öğreneceksiniz?

Bu ünitede;

- Çemberin temel elemanlarını,
- Çemberlerde açıların özelliklerini kullanarak işlemler yapmayı,
- Dairenin çevre ve alan bağıntılarını öğreneceksiniz.

Bu Konu Neden Önemli?

- Çemberler konusu, geometrinin temel konularından biridir.
- Geometrideki alan hesaplamalarında, dairenin alanı önemli bir yere sahiptir.
- Çemberin temel elemanları ile ilgili özellikler, günlük hayatta bazı uzunluk hesaplamalarında kullanılmaktadır.

4.1. Çemberin Temel Elemanları

Hazırlık Çalışması



Yukarıda bir bisiklet görseli verilmiştir. Bu bisikletin tekerleklerini göz önünde bulundurup aşağıdaki soruları sınıfınızda tartışarak yanıtlamaya çalışınız.

- Tekerlekler hangi geometrik şekle benzemektedir?
- Benzetilen geometrik şekilden yola çıkarak tekerleklerin yere temas ettiği kısım nasıl adlandırılabilir?
- Tekerlek ile jantın bisiklete bağlı olduğu nokta arasındaki tellerin uzunlukları eşit midir?

4.1.1. Çember ve Temel Elemanları

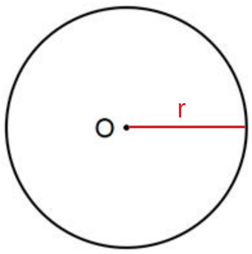
Çember

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine çember denir. Sabit noktaya çemberin merkezi, söz konusu eşit uzaklığa bu çemberin yarıçapı denir.

Çemberin merkezi M veya O ve yarıçapı r ile gösterilir.

Terimler ve Kavramlar

Çap, yarıçap, yay, teğet, kiriş

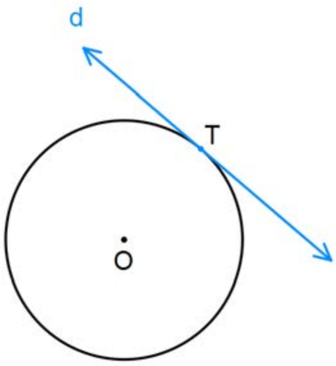


Yanda O merkezli, r yarıçaplı çember verilmiştir.

Semboller ve Gösterimler

r	: Yarıçap
R	: Çap
$\overset{\frown}{AB}$	: AB yayı
$m(\overset{\frown}{AB})$	: AB yayının ölçüsü

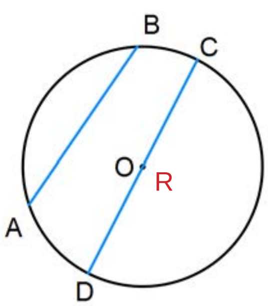
Teğet



Düzlemde bir çember ile tek bir ortak noktası olan doğruya bu çemberin bir teğeti, bu ortak noktaya da teğetin değme noktası denir.

Yanda verilen O merkezli çemberde d doğrusu T noktasında çembere teğettir. T noktası teğetin değme noktasıdır.

Kiriş



Çemberin üzerindeki iki farklı noktayı birleştiren doğru parçasına kiriş denir. Yanda verilen O merkezli çemberde [AB] nın başlangıç ve bitiş noktası çember üzerinde olduğundan [AB] kiriştir.

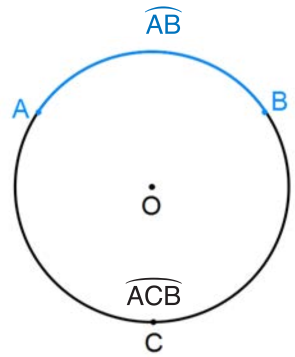
Çember üzerinde çizilebilecek kirişlerden uzunluğu en büyük olanlar, çemberin merkezinden geçen kirişlerdir.

Çemberin merkezinden geçen kirişe çemberin çapı denir. Çapın uzunluğu R ile gösterilir.

Yanda verilen O merkezli çemberde [DC] çemberin merkezinden geçtiğinden [DC], O merkezli çemberin bir çapıdır.

Çapın uzunluğu yarıçapın iki katına eşittir ($R = 2r$).

Yay

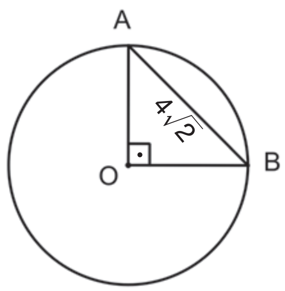


Çember üzerindeki iki farklı nokta ve bu iki noktanın arasında kalan tüm noktaların oluşturduğu çember parçasına bu çemberin bir yayı denir. Çember üzerinde alınan iki nokta farklı iki yay belirtir. Oluşan yaylardan büyük olanına büyük yay, küçük olanına küçük yay denir.

Yanda verilen O merkezli çember üzerindeki A ve B noktalarının belirttiği küçük yay $\overset{\frown}{AB}$ şeklinde, büyük yay ise $\overset{\frown}{ACB}$ şeklinde gösterilir.

Bir $\overset{\frown}{AB}$ nın ölçüsü $m(\overset{\frown}{AB})$ ile gösterilir. Tam bir çember yayının ölçüsü 360° dir.

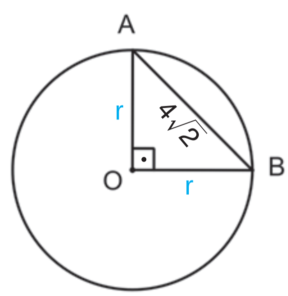
1. ÖRNEK



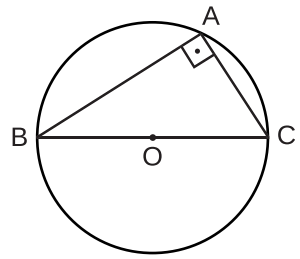
Yanda O merkezli çember ve iki köşesi bu çember üzerinde olan AOB dik üçgeni verilmiştir. $[AO] \perp [OB]$ ve $|AB| = 4\sqrt{2}$ cm olduğuna göre O merkezli çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember üzerindeki her noktanın çemberin merkezine olan uzaklığı, yarıçapı verir. Dolayısıyla $|AO| = |BO| = r$ olur.
AOB üçgeni $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olduğundan $|AB| = r\sqrt{2}$ dir.
$|AB| = r\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ eşitliğinden r = 4 cm bulunur.



2. ÖRNEK



Yanda O merkezli çember ve köşeleri bu çember üzerinde olan BAC dik üçgeni verilmiştir. $|AB| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm ve $[AB] \perp [AC]$ olduğuna göre O merkezli çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

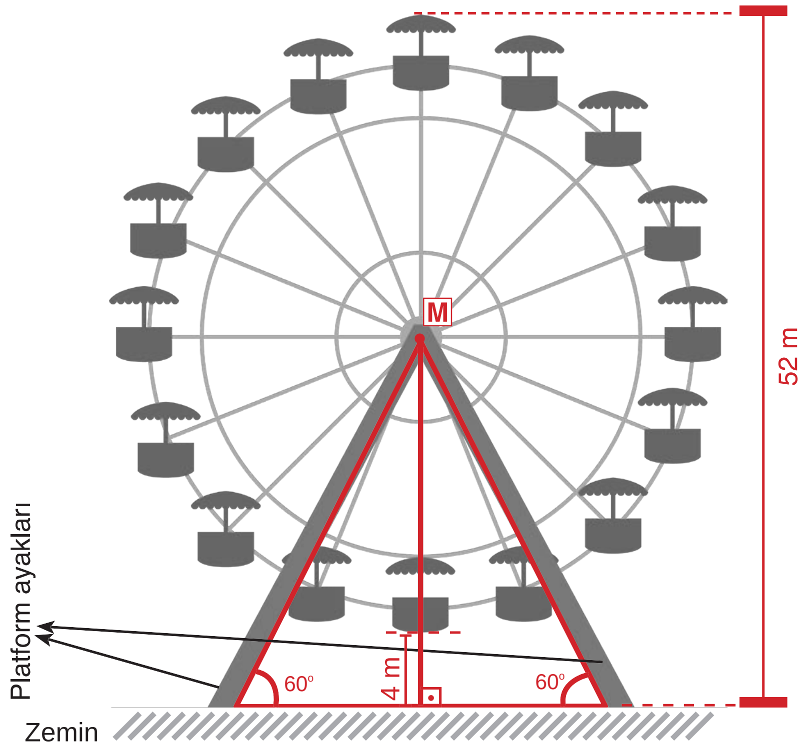
BAC üçgeni 6 - 8 - 10 dik üçgeni olacağından $|BC| = 10$ cm dir. $[BC]$ merkezden geçen kiriş olduğundan O merkezli çemberin çapıdır. Dolayısıyla 2r = 10 eşitliğinden r = 5 cm bulunur.

3. ÖRNEK

Şekilde bir dönme dolabın çizimi verilmiştir. Bu dönme dolap ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

- Dönme dolabın en üst noktasının zeminden yüksekliği 52 metredir.
- Zemine en yakın noktasının zemine uzaklığı 4 metredir.
- Dönme dolabı taşıyan üçgen şeklindeki platform ayaklarının uzunlukları eşittir.
- Platform ayakları ile zemin arasındaki dar açılar 60° dir.
- Şekildeki M noktası dönme dolabın merkezini göstermektedir.

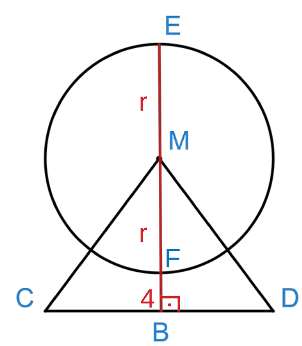
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



a) Şekilde verilen dönme dolabın yarıçapının kaç m olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Yandaki şekilde gösterildiği gibi |EM| = |MF| = r ve |EB| dönme dolabın zeminden yüksekliği olduğundan
$r + r + 4 = 52$ olmalıdır. Buradan
$2r = 48$
$r = 24$ m bulunur.



b) Şekilde verilen dönme dolabı taşıyan platform ayaklarının uzunluğunun kaç m olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Yandaki şekilde verildiği gibi platform ayaklarının zemin ile yaptığı açı 60° olduğundan MKP üçgeni eşkenar üçgen olur.

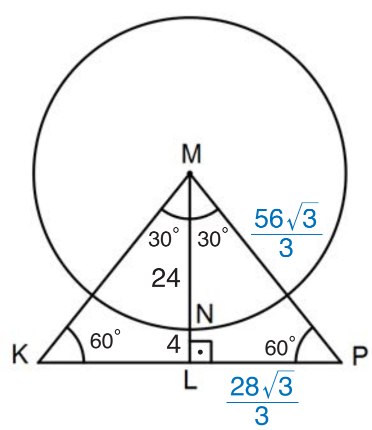
MLP üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni ve |ML| = 28 m olduğundan

$|LP| = \frac{28\sqrt{3}}{3}$ m ve $|MP| = \frac{56\sqrt{3}}{3}$ m bulunur.

(60° karşısındaki dik kenar, 30° karşısındaki dik kenarın $\sqrt{3}$ katıdır.

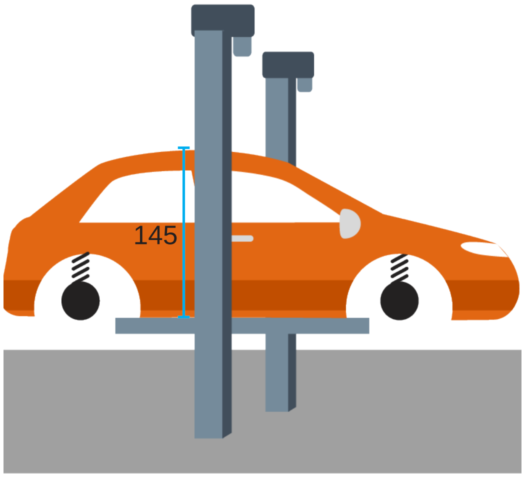
Hipotenüs uzunluğu, 30° karşısındaki dik kenarın 2 katıdır.)

Dolayısıyla platformun ayaklarının uzunluğu $\frac{56\sqrt{3}}{3}$ m olacaktır.

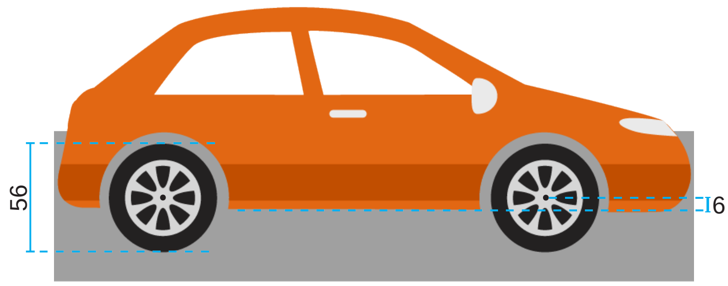


4. ÖRNEK

Şekil I ve Şekil II'de montaj aşamasındaki bir aracın bazı uzunlukları verilmiştir. Montajı biten bu araç ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.



Şekil I



Şekil II

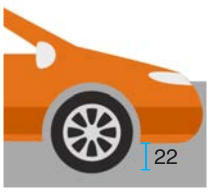
- Aracın tavanının tabana göre yüksekliği 145 cm dir (Şekil I).
- Takılan tekerleklerin çapı 56 cm dir (Şekil II).
- Araç boşken tekerlek merkezinin araç tabanına uzaklığı 6 cm dir (Şekil II).
- Amortisörlerin esneklik özelliğinden dolayı aracın tabanı, araca yüklenen her 100 kg yük için tekerlek merkezi seviyesinden 1 cm aşağı inmektedir.
- Tekerleğin esnekliğinden dolayı araca yüklenen her 50 kg yük için tekerleğin yüksekliği $\frac{1}{4}$ cm azalmaktadır.

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tekerlek takılmış hâldeki boş aracın yerden yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Aracın tekerleğinin yarıçapı $\frac{56}{2} = 28$ cm ve tekerlek merkezinin aracın tabanına uzaklığı 6 cm olduğundan yandaki şekilde verildiği gibi aracın tabanı yerden 22 cm yükselir. Dolayısıyla boş aracın yüksekliği 145 + 22 = 167 cm bulunur.



b) Bu araçla seyahat eden bir ailenin bireyleri toplam 200 kg ağırlığında olduğuna göre aracın dolu hâlinin yerden yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Aracın tabanı, araca yüklenen her 100 kg yük için tekerlek merkezi seviyesinden 1 cm aşağı indiğinden 200 kg için 2 cm aşağı iner. Bu durumda tekerlek merkezinin aracın tabanına olan uzaklığı 6 + 2 = 8 cm olacağından aracın tabanının yerden yüksekliği 28 – 8 = 20 cm olur.

Tekerleklerin esnekliğinden dolayı araca yüklenen her 50 kg yük için tekerleklerin yüksekliği $\frac{1}{4}$ cm kısalmaktadır. Ailenin toplam ağırlığı 200 kg olduğundan tekerleklerin yüksekliği $\frac{200}{50} \cdot \frac{1}{4} = 1$ cm kısalır.

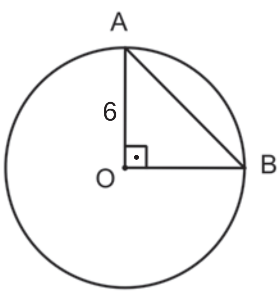
Son durumda aracın yerden yüksekliği 145 + 20 – 1 = 164 cm bulunur.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta sonsuz sayıda nokta seçilebilir.
B) Bir çemberde uzunluğu en fazla olan kiriş, çemberin yarıçapıdır.
C) Merkezi aynı nokta olan çemberlerin çapı da aynı uzunluktadır.
D) Bir çember üzerindeki bir noktadan sonsuz çap çizilebilir.
E) Çember ile yalnız bir ortak noktaya sahip doğruya yay denir.

2. Aşağıda O merkezli, 6 cm yarıçaplı çember ve iki köşesi bu çember üzerinde olan AOB dik üçgeni verilmiştir. AOB üçgeninde $[AO] \perp [OB]$ olduğuna göre |AB| nun kaç cm olduğunu bulunuz.



3. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun kelimeler ile doldurunuz.

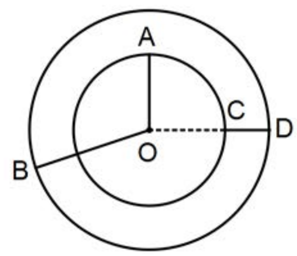
A) Düzlemde bir çember ile yalnız bir ortak noktası olan doğruya .... denir.

B) Çember üzerindeki iki farklı nokta ve bu iki noktanın arasında kalan tüm noktaların oluşturduğu çember parçasına .... denir.

4. Aşağıda gösterilen bisikletin tekerlek bağlantı noktalarından itibaren yüksekliği 70 cm dir. Bu bisiklete 50 cm çapında iki tekerlek takıldığında bisikletin yerden yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.



5. Yandaki şekilde O merkezli iki çember verilmiştir. A, B, C ve D noktaları bu çemberler üzerinde olmak üzere |OA| = 3 cm, |OB| = 5 cm olduğuna göre |CD| nun kaç cm olduğunu bulunuz.



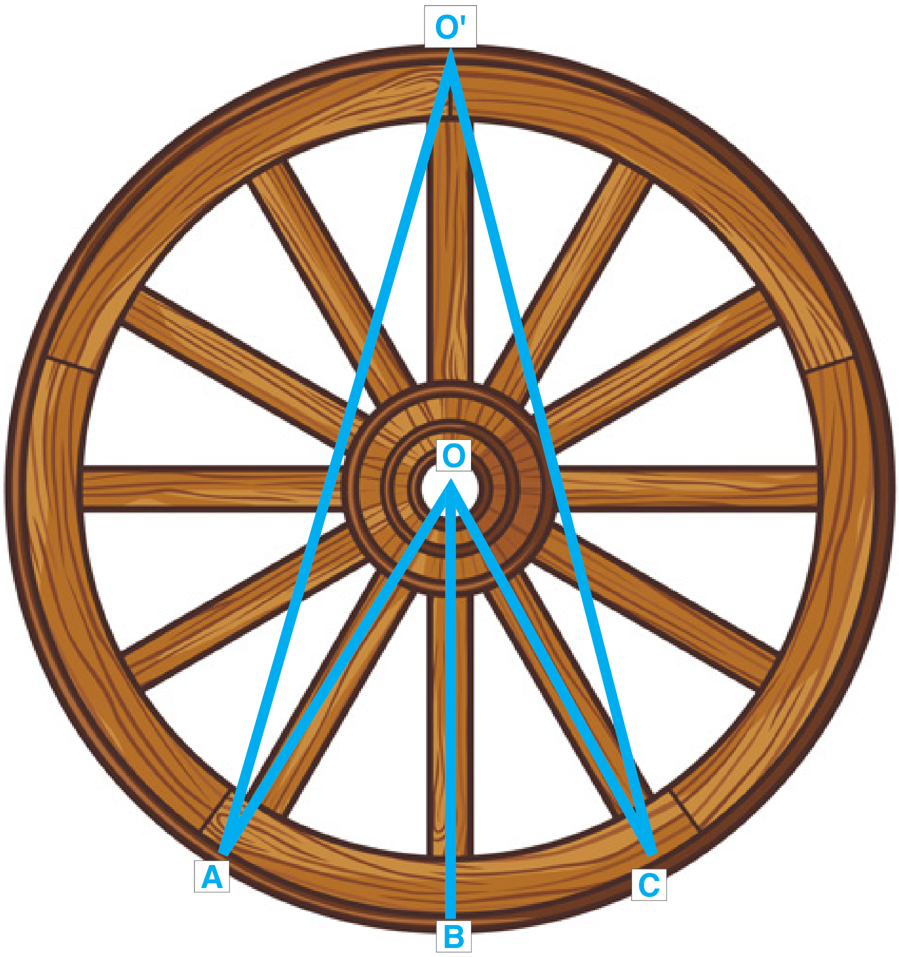
6. Aşağıda yere dik olarak konulmuş 1 TL nin en üst noktasının zeminden yüksekliği 26,15 mm olduğuna göre yarıçapının kaç mm olduğunu bulunuz.



Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6
	A	$6\sqrt{2}$	A) Teğet B) Yay	95	2	13,075

4.2. Çemberde Açılar

Hazırlık Çalışması



Yukarıdaki şekilde bir tekerlek görseli verilmiştir. Tekerlekteki tahta çubuklar, dingil yuvasından tekerleğin dış çemberine doğru eşit aralıklarla yerleştirilmiştir. Bu çubuklar arasında oluşan açıların köşeleri merkezdedir.

Buna göre aşağıdaki problemleri yukarıdaki görseli dikkate alarak tartışınız.

- Tekerlekte yan yana bulunan tahta çubukların arasında oluşan açıların ölçülerini karşılaştırınız.
- Tahta çubuklar arasında kalan açılara ortak bir isim bulmaya çalışınız.
- Köşesi çember üzerinde olan $\widehat{AO'C}$ gibi açılara ortak bir isim bulmaya çalışınız.
- $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{AO'C}$ açıları arasında bir bağ kurmaya çalışınız.

4.2.1. Çemberde Açılar ve Özellikleri

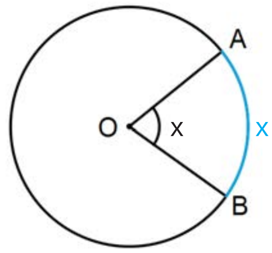
Merkez Açı

Köşesi çemberin merkezinde olan açıya bu çemberin bir merkez açısı denir.

Bir merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşittir.

Yandaki O merkezli çemberde $\widehat{BOA}$ merkez açıdır. Bu açının gördüğü yay $\overset{\frown}{BA}$ dır.

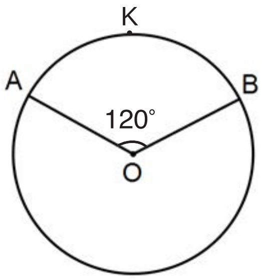
$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = x$



Terimler ve Kavramlar

Merkez açı, çevre açı

1. ÖRNEK



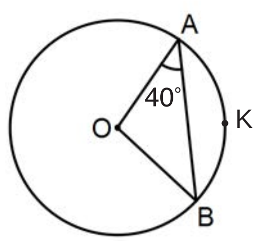
Yanda verilen O merkezli çemberde
$m(\widehat{AOB}) = 120^\circ$
$m(\overset{\frown}{AKB}) = 2x + 30^\circ$ olduğuna göre x in kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Merkez açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan
$2x + 30^\circ = 120^\circ$
$2x = 90^\circ$
$x = 45^\circ$ bulunur.

1 SIRA SİZDE

Şekilde O merkezli çember ve AOB üçgeni verilmiştir.
$m(\widehat{OAB}) = 40^\circ$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{AKB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

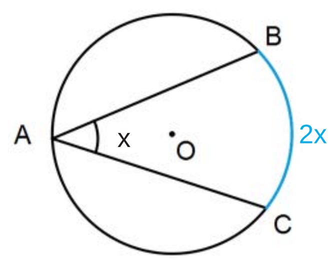


Çevre Açı

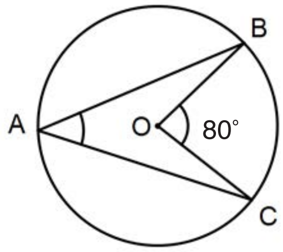
Köşe noktası bir çember üzerinde olan ve kenarları çemberi iki farklı noktada kesen açıya bu çemberin bir çevre açısı denir.

Bir çemberde, bir çevre açısının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

Şekilde verilen O merkezli çemberde $\widehat{BAC}$ çevre açıdır. Dolayısıyla $m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC}) = 2x$ olur.



2. ÖRNEK



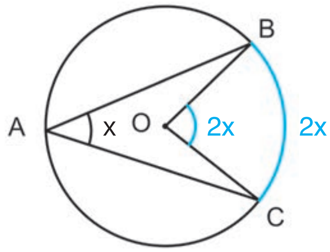
Yanda verilen O merkezli çemberde $m(\widehat{BOC}) = 80^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

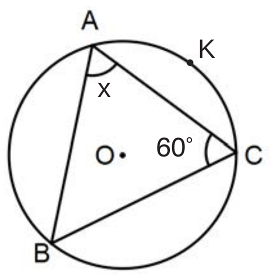
$\widehat{BOC}$ merkez açı olduğundan $m(\widehat{BOC}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 80^\circ$ dir. Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğundan $m(\widehat{BAC}) = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ bulunur.

Sonuç: Bir merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşit; aynı yayı gören çevre açı ise bu açının ölçüsünün yarısına eşittir. Yanda verilen O merkezli çemberde

$m(\widehat{BOC}) = m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$ olur.



3. ÖRNEK



Şekilde O merkezli çember ve köşeleri bu çember üzerinde olan ABC üçgeni verilmiştir.
$m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$
$m(\overset{\frown}{AKC}) = 100^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

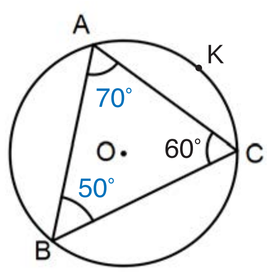
ÇÖZÜM

$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AKC})}{2}$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$ olur.

Üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğundan $x + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

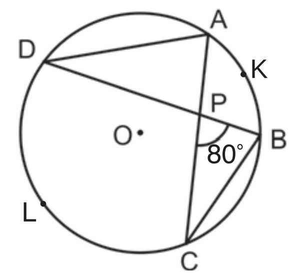
$x + 110^\circ = 180^\circ$

$x = 70^\circ$ bulunur.

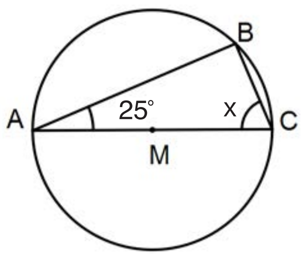


2 SIRA SİZDE

Yandaki şekilde O merkezli çember ve [AC], [DB] kiriş olmak üzere $m(\overset{\frown}{AKB}) = 60^\circ$, $m(\widehat{CPB}) = 80^\circ$ ise $m(\overset{\frown}{DLC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



4. ÖRNEK



Şekilde verilen M merkezli çemberin çapı [AC] olmak üzere $m(\widehat{BAC}) = 25^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Herhangi bir çemberde çap, çember yayını iki eş parçaya ayırır. Dolayısıyla $m(\overset{\frown}{AKC}) = 180^\circ$ olacaktır. $\widehat{ABC}$ çevre açı olduğundan

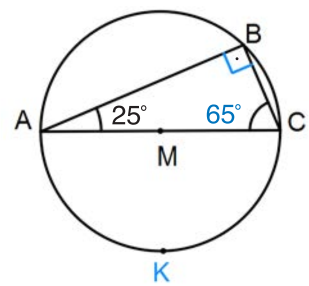
$m(\widehat{ABC}) = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ olur.

ABC üçgeninin iç açılarının toplamı 180° olacağından

$90^\circ + x + 25^\circ = 180^\circ$

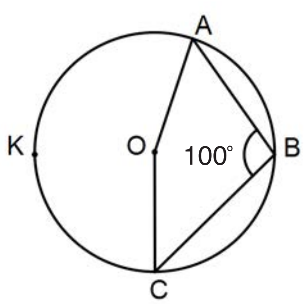
$x + 115^\circ = 180^\circ$

$x = 65^\circ$ bulunur.



Sonuç: Herhangi bir çemberde çapı gören çevre açısının ölçüsü 90° dir.

5. ÖRNEK

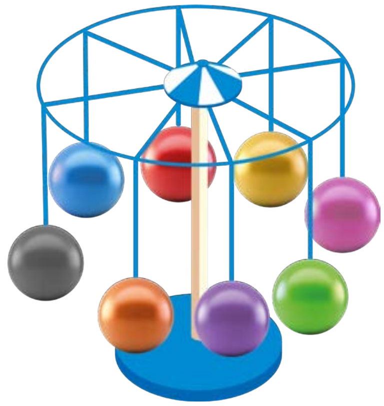


Şekilde verilen O merkezli çemberde A, B, C, K noktaları çember üzerinde olmak üzere $m(\widehat{ABC}) = 100^\circ$ ise $m(\widehat{AOC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{ABC}) = 100^\circ$ ise $m(\overset{\frown}{AKC}) = 200^\circ$ olacaktır. Tam bir çember yayı 360° olduğundan $m(\overset{\frown}{ABC}) = 160^\circ$ olur. $m(\widehat{AOC})$ merkez açı olduğundan gördüğü yayın ölçüsüne eşittir. Dolayısıyla $m(\widehat{AOC}) = 160^\circ$ bulunur.

6. ÖRNEK



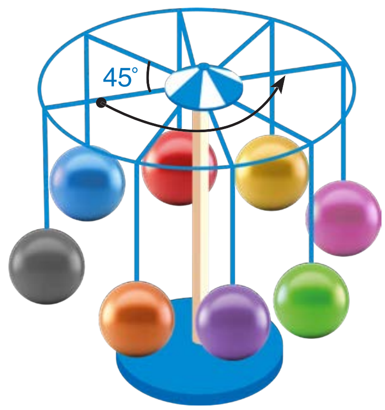
Yandaki şekilde saat yönünün tersine dönen bir oyuncağın çizimi gösterilmiştir. Bu oyuncak ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

- Oyuncağın oturakları renkli top şeklindedir.
- Bir şarkı ile dönmeye başlayan toplar, şarkı bittiği anda durmaktadır.
- A, B, C adında 3 farklı şarkı; sırası ile 100 saniye, 125 saniye ve 170 saniye sürmektedir.
- Oyuncak, her 40 saniyede bir tam tur atmaktadır.
- Oyuncağın oturakları eşit aralıklara sahiptir.

Verilen bu bilgilere göre aşağıdaki problemleri çözünüz.

a) Çocuğunu gri oturağa bindiren bir kişinin, A şarkısı ile dönmeye başlayan oyuncak durduğunda çocuğunu hangi oturağın ilk bulunduğu konumdan alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



Toplam 8 oturak vardır. Oturaklar eşit aralıklı olduğundan her bir oturak arası $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ olur.
40 saniyede tam bir tur atan oturaklar, saniyede $\frac{360^\circ}{40} = 9^\circ$ yer değiştirir. A şarkısı 100 saniye olduğundan 80 saniye sonra 2 tam tur atan oyuncak tekrar aynı konumda bulunur. Oyuncak 20 saniye sonra $20 \cdot 9^\circ = 180^\circ$ saat yönünün tersine dönerek duracaktır. Dolayısıyla gri oturağa bindirilen çocuk 100 saniye sonra pembe oturağın ilk konumunda olacaktır.

b) Çocuğunu mavi oturağa bindiren bir kişi, art arda iki şarkı çaldıktan sonra çocuğunu mor oturağın bulunduğu ilk konumdan almıştır. Buna göre hangi iki şarkının art arda çaldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

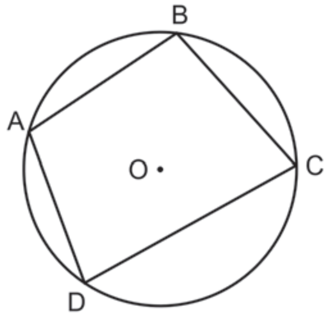
40 saniyede bir tam tur atan oyuncak, 40 saniyenin katlarında tekrar aynı konumda olacaktır. Kalan saniyelerde kaç derecelik yer değiştirme gerçekleştireceği aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Art Arda Çalan İki Şarkı	A ve B	A ve C	B ve C
Toplam süre	225 saniye	270 saniye	295 saniye
Attığı tam tur sayısı ve artan saniye	$225 = 5 \cdot 40 + 25$ olduğundan 5 tur 25 saniye	$270 = 6 \cdot 40 + 30$ olduğundan 6 tur 30 saniye	$295 = 7$ □ $40 + 15$ olduğundan 7 tur 15 saniye
Kalan saniye ile gerçekleşecek yer değiştirme	Saniyede 9° yer değiştirdiğinden $25 \cdot 9^\circ = 225^\circ$	Saniyede 9° yer değiştirdiğinden $30 \cdot 9^\circ = 270^\circ$	15 □ $9^\circ = 135^\circ$

Mavi oturak ile mor oturak arası 135° olduğundan problemin çözümü B ve C şarkılarıdır.

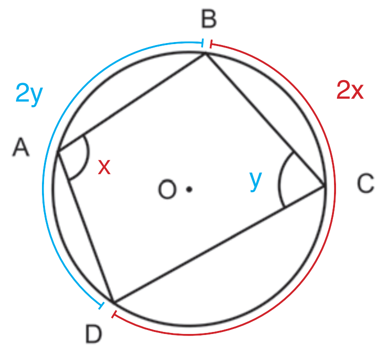
7. ÖRNEK

Yandaki şekilde O merkezli çember ve köşeleri bu çember üzerinde olan ABCD dörtgeni verilmiştir. $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BCD})$ toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.



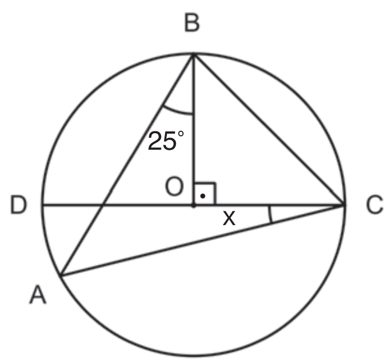
ÇÖZÜM

$\widehat{DAB}$ ve $\widehat{BCD}$ birer çevre açıdır.
$m(\widehat{DAB}) = x$ olsun, $m(\overset{\frown}{DCB}) = 2x$ olur.
$m(\widehat{BCD}) = y$ olsun, $m(\overset{\frown}{BAD}) = 2y$ olur.
Tam bir çember yayının ölçüsü 360° olduğundan
$m(\overset{\frown}{DCB}) + m(\overset{\frown}{BAD}) = 2x + 2y = 360^\circ$ olacaktır.
Eşitliğin her iki tarafı 2 ile bölünür ise
$\dfrac{2x+2y}{2} = \dfrac{360^\circ}{2}$
$x + y = 180^\circ$ olacağından $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{BCD}) = 180^\circ$ bulunur.



Sonuç: Köşeleri bir çember üzerinde olan dörtgenin karşılıklı açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

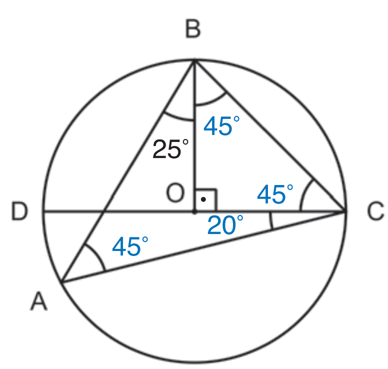
8. ÖRNEK



Yandaki şekilde O merkezli, [DC] çaplı çember ve köşeleri bu çember üzerinde olan ABC üçgeni verilmiştir.
$[BO] \perp [DC]$
$m(\widehat{ABO}) = 25^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DCA}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çemberde [OB], [OC] yarıçap olduğundan |OB| = |OC| = r olur. $\widehat{BOC}$ ikizkenar dik üçgen olduğundan $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = 45^\circ$ dir. $m(\overset{\frown}{BC}) = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ dir. $\widehat{ABC}$ nin iç açılar toplamı 180° olacağından
$x + 45^\circ + 70^\circ + 45^\circ = 180^\circ$
$x + 160^\circ = 180^\circ$ ve $x = 20^\circ$ bulunur.



Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2
	100°	140°

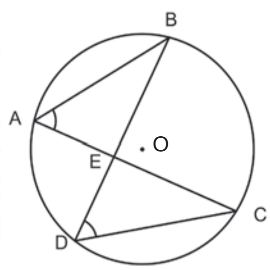
Alıştırmalar

1. Aşağıdaki analog saat 12.30 u gösterdiğinde akrep ile yelkovan arasındaki dar açının kaç derece olduğunu bulunuz.

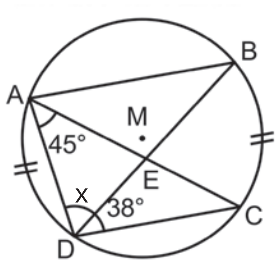


2. Aynı yayı gören bir çevre açı ile merkez açının toplamı 120° olduğuna göre bu merkez açının kaç derece olduğunu bulunuz.

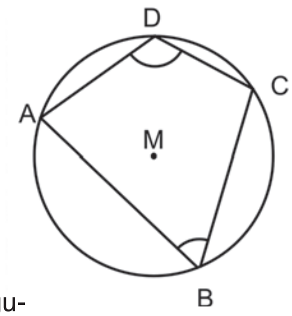
3. Yanda verilen O merkezli çemberde
$m(\widehat{BAC}) = 3x - 16^\circ$ ve
$m(\widehat{BDC}) = 2x + 12^\circ$ ise
$m(\widehat{BC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



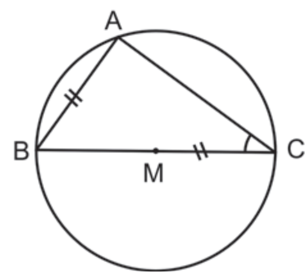
4. Yandaki şekilde A, B, C ve D noktaları çember üzerindedir. $m(\widehat{BC}) = m(\widehat{AD})$
$m(\widehat{BDC}) = 38^\circ$
$m(\widehat{CAD}) = 45^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ADB}) = x$ in kaç derece olduğunu bulunuz.



5. Yandaki şekilde A, B, C ve D noktaları M merkezli çember üzerindedir.
$m(\widehat{ADC}) = 4x - 32^\circ$
$m(\widehat{ABC}) = 2x + 20^\circ$
olduğuna göre $m(\widehat{B})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



6. Yandaki şekilde ABC bir üçgen A, B ve C noktaları M merkezli çember üzerindedir.
$|AB| = |MC|$ ise
$m(\widehat{ACB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.



7. Bir şirket, engelli aracının büyük tekerleğini üretecektir. Üretilecek olan engelli aracının çizimi aşağıda verilmiştir. Buna göre üretimi yapacak olan makinenin bilgisayar sistemine, tekerlekte bulunan demir çubuklar arasındaki açıların eşit olarak kaç derece girilmesi gerektiğini bulunuz.



Cevap Anahtarı	1	2	3	4	5	6	7
	165°	80°	136°	59°	84°	30°	36°

4.3.

Dairenin Çevresi ve Alanı

Hazırlık Çalışması



Küçük boy



Orta boy



Büyük boy



4 eşit parça



8 eşit parça

Yukarıda farklı boylarda pizza ve büyük boy pizzanın eşit parçalara bölünmüş görselleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki soruları sınıfınızda tartışarak yanıtlayınız.

- Pizza hangi geometrik şekle benzemektedir?
- Küçük boy, orta boy ve büyük boy şeklinde adlandırılan pizzaların birbirinden farkı nedir?
- Hangi görselde pizzanın orta noktası daha belirgindir?
- Pizzayı eşit parçalara ayırmak için nasıl bir yol izlenebilir?
- Yukarıdaki pizza parçalarının her birine ne ad verilebilir?

4.3.1. Dairenin Çevre ve Alan Bağıntıları

Dairenin Çevre Uzunluğu

Bir çember ile çemberin iç bölgesinin birleşiminden oluşan düzlem parçasına daire denir.

Dairenin büyüklüğü değişse de çevresinin çapına oranı daima sabit bir sayıdır. Bu sabit sayıya π (Pi) adı verilir. π sayısı 3,14159... biçiminde devam eden bir irrasyonel sayıdır. π sayısı sayı doğrusunda 3,14 ile $\frac{22}{7}$ arasında yer alır.

Çapı R birim yarıçapı r birim olan bir dairenin çevre uzunluğu Ç olmak üzere $\frac{Ç}{R} = \pi$ olacağından $Ç = R \cdot \pi$ olur. Bu eşitlikte $R = 2r$ değeri yerine yazılırsa $Ç = 2\pi r$ şeklinde çevre bağıntısı elde edilir.

Terimler ve Kavramlar

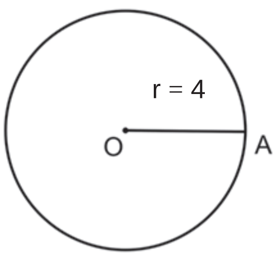
Yay uzunluğu, daire, daire dilimi

Semboller ve Gösterimler

$|\overparen{AB}|$: AB yayının uzunluğu

$\approx$: Yaklaşık

1. ÖRNEK



Yanda O merkezli çember verilmiştir. Bu çemberin yarıçapı 4 cm olduğuna göre çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

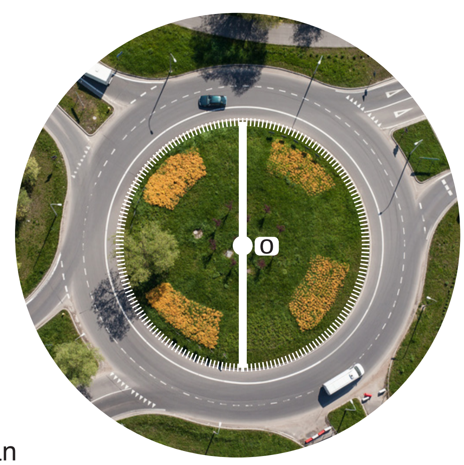
ÇÖZÜM

$Ç = 2\pi r$ bağıntısında r = 4 cm değeri yerine yazılır ise $Ç = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$ cm bulunur.

İstenilirse π sayısının yaklaşık değeri yerine yazılarak dairenin çevre uzunluğu yaklaşık olarak bulunabilir. $\pi \approx 3,14$ olduğundan $Ç = 8\pi \approx 25,12$ cm bulunur.

2. ÖRNEK

Yanda merkezi O noktası olan daire şeklinde bir kavşak verilmiştir. Bu kavşağın yeşil alanını korumak için çevresine 180 metre uzunluğunda örgülü tel çekilmiştir. Kavşağın merkezinden geçecek şekilde, yeşil alanın bir ucundan diğer ucuna düz sulama borusu yerleştirilecektir. Borunun uzunluğunun kaç metre olması gerektiğini bulunuz.



ÇÖZÜM

Yeşil alanın yarıçapı r olmak üzere çevresi 180 m olduğundan

$2\pi r = 180$ buradan $r = \frac{180}{2\pi}$ m bulunur.

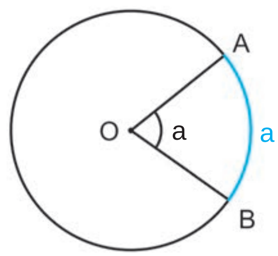
Borunun uzunluğu daire şeklindeki bölgenin çapına eşit olacağından

$2r = 2 \cdot \frac{180}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$ m olmalıdır.

Yay Uzunluğu

Yanda verilen O merkezli çemberde $m(\overset{\frown}{AB}) = a$ olmak üzere $\overset{\frown}{AB}$ nın uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}|$ şeklinde gösterilir.

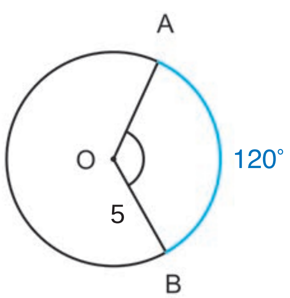
$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \frac{a}{360^\circ}$ bağıntısı ile hesaplanır.



3. ÖRNEK

Yarıçapı 5 cm olan bir çemberde ölçüsü 120° olan yay parçasının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yandaki O merkezli çemberde $\overset{\frown}{AB}$ nın uzunluğu

$r = 5$, $a = 120^\circ$ alınarak

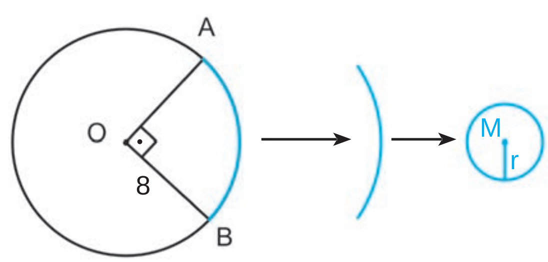
$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ}$

$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}$

$|\overset{\frown}{AB}| = \frac{10\pi}{3}$ cm bulunur.

4. ÖRNEK

Yanda verilen O merkezli 8 cm yarıçaplı çember şeklindeki bakır telin A ve B noktaları ile belirtilen kısmı, $m(\overset{\frown}{AB}) = 90^\circ$ olacak şekilde kesilerek M merkezli yeni bir çember yapılmıştır. Oluşan küçük çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

Kesilen parçanın uzunluğu M merkezli çemberin çevresine eşit olacaktır.

$|\overset{\frown}{AB}| = \cancel{2\pi} \cdot 8 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = \cancel{2\pi} r$

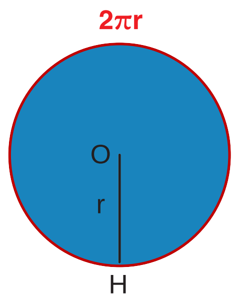
$8 \cdot \frac{1}{4} = r$ ise $r = 2$ cm bulunur.

1 SIRA SİZDE

Yarıçapı 6 cm olan bir çemberde ölçüsü 45° olan yay parçasının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

Dairenin Alanı

Yarıçapı r birim olan bir dairenin alanı A olmak üzere $A = \pi r^2$ dir. Aşağıda verilen örnek, dairenin alan bağıntısının bir ispatı olmasa da bu bağıntının doğruluğunu sezgisel bir şekilde hissettirmektedir.



Yukarıdaki O merkezli r yarıçaplı dairenin çevre uzunluğu **$2\pi r$** dir.



Bu daire yukarıdaki gibi 8 eş dilime ayrılsın.



Bu dilimler yukarıdaki gibi yan yana dizildiğinde oluşan şekil bir paralelkenara benzemektedir. Ancak alt ve üst kenarlar doğrusal değildir. Bu kenarları doğrusala yaklaştırmak için dilim sayısını arttırmak gerekir.

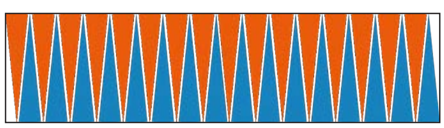


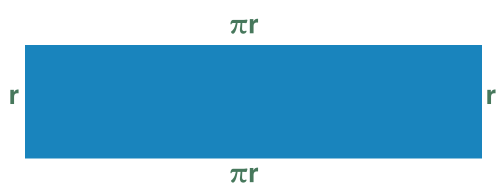
Şimdi aynı daire 16 eş dilime ayrılsın.



Bu dilimler yukarıdaki gibi yan yana dizildiğinde alt ve üst kenarlar önceki hâline göre daha doğrusala yakın ve yan kenarlar da daha dik durmaktır.





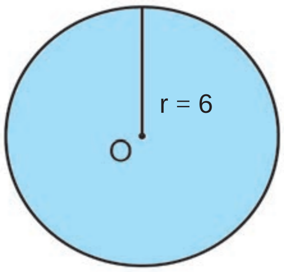


Bu şekilde devam edilerek r yarıçaplı daire daha fazla eş dilime ayrılıp yan yana dizildiğinde şekil dikdörtgene daha çok benzeyecektir. Nihayet yeteri sayıda eş parçaya ayrıldığında her bir parça doğrudan ibaret olacak ve yan yana dizildiğinde bir dikdörtgen elde edilecektir.

Elde edilen dikdörtgenin alt ve üst tabanın toplamı r yarıçaplı dairenin çevresine eşit olduğundan her birinin uzunluğu dairenin çevre uzunluğunun yarısına eşittir. Ayrıca yüksekliği de yarıçapa eşittir.

Bu dikdörtgenin alanı r yarıçaplı dairenin alanına eşit olduğundan r yarıçaplı dairenin alanı A olmak üzere $A = \pi r \cdot r = \pi r^2$ dir.

5. ÖRNEK



Yanda verilen O merkezli 6 cm yarıçaplı dairenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$A = \pi r^2$ bağıntısında r = 6 alınırsa
$A = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \ cm^2$ bulunur.

2 SIRA SİZDE

Yarıçapı 7 cm olan bir dairenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6. ÖRNEK

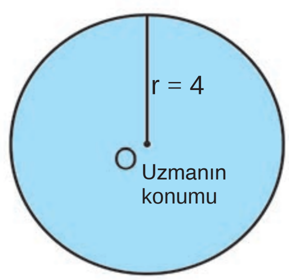
Yandaki görselde bir rüzgâr enerjisi üretim tesisinin denetlemesini yapan bir iş güvenliği uzmanı görülmektedir. Uzman, bulunduğu konumda sabit durarak bir bilgisayar ve uçangöz (drone) yardımı ile etrafı görüntüleyecektir. Uçangöz sadece bulunduğu konumun altını görüntüleyebilmektedir. Uçangözün kumanda menzili 4 km olduğuna göre uzmanın görüntüleyebileceği düzlemsel alanın en fazla kaç km^2 olabileceğini bulunuz.



ÇÖZÜM

İş güvenliği uzmanı, sabit bir noktada durup uçangözün kumanda menzili kadar daire şeklinde bir alanı görüntüleyebilir.

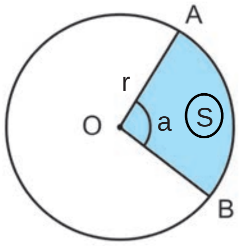
Bu dairenin yarıçapı 4 km olduğundan görüntüleyeceği alan A olmak üzere
$A = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \ km^2$ bulunur.



Daire Diliminin Alanı

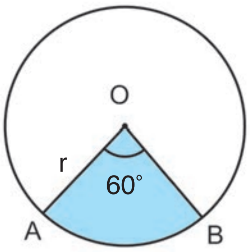
Bir dairede merkez açının iç bölgesi ve gördüğü yayın sınırladığı bölgeye daire dilimi denir. Bir daire diliminin alanı, bu dilimi oluşturan merkez açının ölçüsü ile doğru orantılıdır.

Yandaki şekilde [OA], [OB] ve $\overset{\frown}{AB}$ ile sınırlı daire dilimi verilmiştir. Bu daire diliminin alanı S ve $m(\widehat{AOB}) = a$ olmak üzere $S = \pi r^2 \cdot \frac{a}{360^\circ}$ olur.



7. ÖRNEK

Yanda O merkezli bir daire ve [OA], [OB] ve $\overset{\frown}{AB}$ ile sınırlı daire dilimi verilmiştir. $m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$ ve $|OA| = |OB| = r = 12$ cm olduğuna göre daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



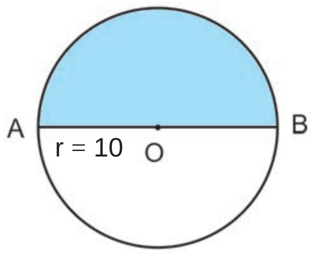
ÇÖZÜM

İstenen daire diliminin alanı S olmak üzere

$S = \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ}$

$S = \pi \cdot 144 \cdot \frac{1}{6} = 24\pi \ cm^2$ bulunur.

8. ÖRNEK



Şekilde O merkezli daire ve bu daire üzerinde yarım daire dilimi verilmiştir. Dairenin yarıçapı 10 cm olduğuna göre daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenen daire dilimini sınırlayan $\overset{\frown}{AB}$ nın ölçüsü 180° dir.

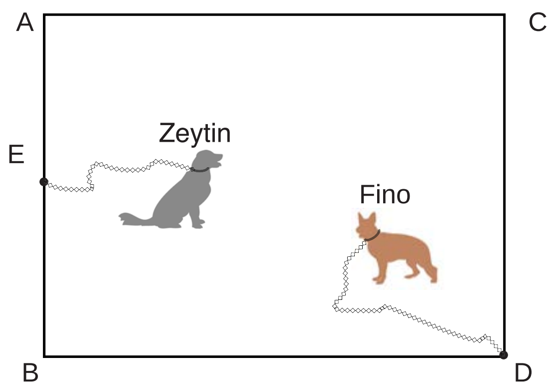
Daire diliminin alanı S olmak üzere $S = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ}$ olacağından

$S = \pi \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} = 50\pi \ cm^2$ bulunur.

3 SIRA SİZDE

Yarıçapı 8 cm olan bir çeyrek daire diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9. ÖRNEK



Yanda bir fabrikanın ABCD dikdörtgeni şeklinde bahçesinde bulunan Fino ve Zeytin adlı bekçi köpekleri gösterilmiştir.

- Fino'nun zinciri 70 m, Zeytin'in zinciri 50 m uzunluğundadır.
- Bahçenin kenar uzunlukları |AB| = |CD| = 100 m ve |AC| = |BD| = 120 m
- |AE| = |EB|
- Zeytin, E noktasına; Fino, D noktasına bağlıdır.

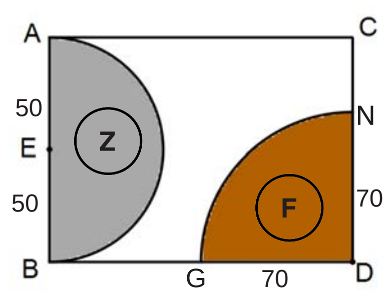
Verilen bilgilere göre aşağıdaki problemleri çözünüz.

a) Zeytin'in kontrol edebileceği en fazla alanın Fino'nun kontrol edebileceği en fazla alana oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

Zincir uzunlukları, dairenin yarıçapı ve zincirin bağlı olduğu noktalar dairenin merkezi olarak kabul edilirse aşağıdaki şekilde verildiği gibi Zeytin, 50 m yarıçaplı yarım daire dilimi şeklinde bir alanı; Fino, 70 m yarıçaplı çeyrek daire dilimi şeklinde bir alanı kontrol eder. Buna göre Zeytin'in kontrol ettiği alan Z, Fino'nun kontrol ettiği alan F olmak üzere

$$Z = \pi \cdot 50^2 \cdot \frac{180^\circ}{360^\circ}$$
$$= 2500\pi \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 1250\pi \ \text{m}^2$$
$$F = \pi \cdot 70^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ}$$
$$= 4900\pi \cdot \frac{1}{4}$$
$$= 1225\pi \ \text{m}^2 \text{ olduğundan}$$

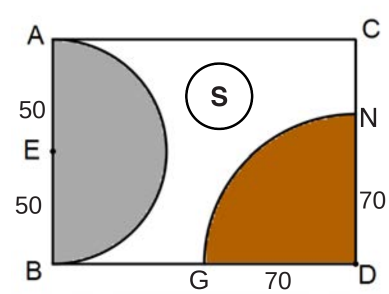


Zeytin'in kontrol ettiği alanın Fino'nun kontrol ettiği alana oranı $\frac{Z}{F} = \frac{1250\pi}{1225\pi} = \frac{1250}{1225} = \frac{50}{49}$ bulunur.

b) Zeytin ve Fino'nun kontrolünde olmayan alanın kaç m^2 olduğunu $\pi = 3,14$ alarak bulunuz.

ÇÖZÜM

Zeytin'in kontrol ettiği alan $1250\pi \ \text{m}^2$ ve Fino'nun kontrol ettiği alan $1225\pi \ \text{m}^2$ olduğuna göre toplam $2475 \cdot \pi = 2475 \cdot (3,14) = 7771,5 \ \text{m}^2$ alanı kontrol ederler. Zeytin ve Fino'nun kontrol edemediği alan, yandaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeni içerisindeki beyaz alandır. Bu alan S olmak üzere $A(ABCD) = 100 \cdot 120 = 12\,000 \ \text{m}^2$ olduğundan $S = 12\,000 - 7771,5 = 4228,5 \ \text{m}^2$ bulunur.



MATEMATİKTE İZ BIRAKANLAR

Mimar Sinan (1489–1588)

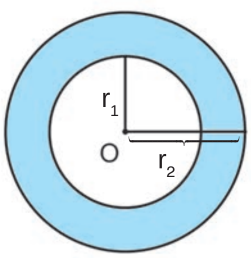
Mimar Sinan; Kanuni Sultan Süleyman, II. Selim ve III. Murat dönemlerinde mimarbaşı olarak görev yapmıştır. İmparatorluğun gücünü simgeleyen mimarlık başyapıtlarının tasarlanmasında ve uygulanmasında büyük rol oynamıştır.

Ancak Mimar Sinan'ın en büyük arzusu, cemaati gök kubbe gibi büyük bir kubbe altında toplayan, mekân birliği tam, aydınlık ve ferah bir cami inşa etmek olmuştur. Sinan'ın amacına tam olarak kavuştuğu, arzusunun gerçeğe dönüştüğü eseri, "ustalık eserim" diye tanımladığı Edirne Selimiye Camisi'dir.

Genellikle kubbeler, kademeli şekilde birkaç yarım kubbenin üzerinde yükselirken bu caminin kubbesi tek kubbe olarak yapılmıştır. Selimiye Camisi'nin kubbe yüksekliği 43,25 metre ve çapı 31,5 metredir.

Kaynak: (2011 Ocak). Bilim ve Teknik Dergisi. (Düzenlenmiştir.)

10. ÖRNEK



Yandaki şekilde O merkezli r_1 ve r_2 yarıçaplı iki daire verilmiştir. $r_1 = 4$ cm ve $r_2 = 6$ cm olduğuna göre iki daire arasında kalan bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

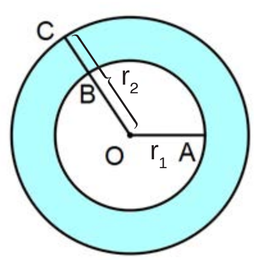
ÇÖZÜM

İki daire arasındaki alan, büyük yarıçaplı dairenin alanından küçük yarıçaplı dairenin alanı çıkarılarak bulunabilir. Boyalı alan S olmak üzere

$$\begin{aligned} S &= \pi r_2^2 - \pi r_1^2 \\ &= \pi 6^2 - \pi 4^2 \\ &= 36\pi - 16\pi \\ &= 20\pi \ \text{cm}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4 SIRA SİZDE

Yandaki şekilde O merkezli, r_1 ve r_2 yarıçaplı iki daire verilmiştir. $|OA| = r_1 = 5$ cm ve $|OC| = r_2 = x$ cm dir. Mavi ile boyanmış bölgenin alanı 24π cm^2 ise x in kaç cm olduğunu bulunuz.

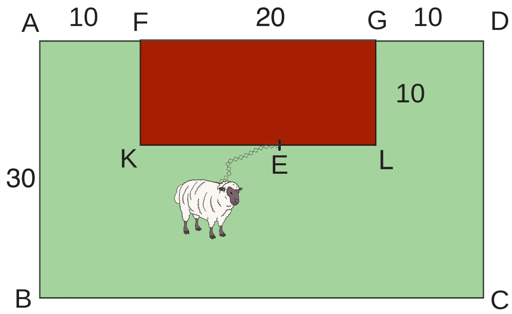


Sıra Sizde Cevap Anahtarı	1	2	3	4
	$\frac{3\pi}{2}$	49π	16π	7

Alıştırmalar

1. Bir otomobilin tekerleklerinin yarıçapı 25 cm dir. Bu otomobil 1570 metre yol aldığında tekerleklerin kaç tur dönmesi gerektiğini bulunuz. ($\pi = 3,14$ alınız.)

2. Aşağıda dikdörtgen şeklinde bir ev (FKLG) ve bu evin bulunduğu dikdörtgen şeklinde arsa (ABCD) belirtilmiştir.



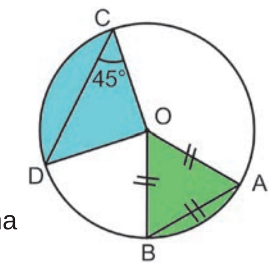
Bu ev ve arsa ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

- |AF| = IGLI= |GD| = 10 m
- |FG| = 20 m
- |DC| = 30 m
- |KE| = IELI
- Koyunun bağlı olduğu ipin uzunluğu 15 m dir.

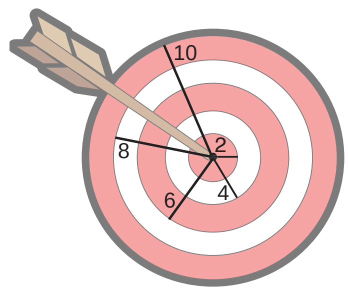
Verilen bilgilere göre arsa içerisindeki yeşil bölgede otlayan ve E noktasına bağlı olan bir koyunun otlayabileceği alanın <u>en fazla</u> kaç m^2 olduğunu bulunuz.

3. Bir daire diliminin yay uzunluğu x cm, alanı x cm^2 olduğuna göre bu dairenin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

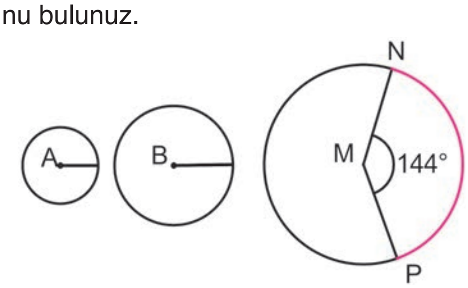
4. Yandaki şekilde yarıçapı 6 cm olan O merkezli daire verilmiştir. A, B, C, D noktaları çember üzerinde ve $|OA| = |OB| = |AB|$ ve $m(\widehat{DCO}) = 45^\circ$ olduğuna göre yeşil renkli daire diliminin alanının mavi renkli daire diliminin alanına oranını bulunuz.



5. Yanda bir hedef tahtası içindeki dairelerin yarıçapları verilmiştir. En içteki dairenin yarıçapı 2 cm olup içten dışa her bir dairenin yarıçapı 2 cm artmaktadır. Buna göre kırmızı bölgelerin alanlarının toplamının beyaz bölgelerin alanlarının toplamına oranını bulunuz.



6. Aşağıdaki şekilde yarıçapları sırasıyla 2 cm, 3 cm olan A, B merkezli tel çemberler açılıp uç uca birleştirilerek, M merkezli çember oluşturulmaktadır. Buna göre M merkezli çemberde $m(\widehat{NMP}) = 144^\circ$ ise $|\widehat{NP}|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



Cevap Anahtarı	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1000	125π	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4π

Öz Değerlendirme Formu

Bu ünite kapsamında aşağıda listelenen davranışlardan kazandığınız beceriler için **EVET**, kazanamadığınız beceriler için **HAYIR** kutucuğuna x işareti koyarak kendinizi değerlendiriniz.

	Değerlendirme Ölçütleri	EVET	HAYIR
1	Çemberin temel elemanı olan çapı tanımlayabilirim.		
2	Çemberin temel elemanı olan yayı tanımlayabilirim.		
3	Çemberin temel elemanı olan teğeti tanımlayabilirim.		
4	Çemberin temel elemanı olan kirişi tanımlayabilirim.		
5	Çemberlerde merkez açının özelliklerini kullanarak işlemler yapabilirim.		
6	Çemberlerde çevre açının özelliklerini kullanarak işlemler yapabilirim.		
7	Dairenin çevre ve alan bağıntılarını bu dairenin yarıçapı cinsinden yazabilirim.		
8	Dairenin çevresi ve alanı ile ilgili işlemler yapabilirim.		
9	Daire diliminin alanını hesaplayabilirim.		
10	Daire diliminin yay uzunluğunu hesaplayabilirim.		

Değerlendirme

Değerlendirme sonunda **HAYIR** cevaplarınızı gözden geçiriniz. Öğrendiklerinizi yeterli görmüyorsanız öğrenme faaliyetini tekrar ediniz.

Ölçme ve Değerlendirme

A. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri uygun kelimelerle doldurunuz.

1. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine .... denir.

2. Bir çember ile bu çemberin iç bölgesinin birleşimine .... denir.

3. Çember üzerindeki iki farklı nokta ve bu iki noktanın arasında kalan tüm noktaların oluşturduğu çember parçasına .... denir.

4. Köşe noktası bir çember üzerinde olan ve her bir kenarı çemberi iki farklı noktada kesen açıya .... denir.

B. Aşağıda harfler ile verilen ifadeleri tabloda numaralar ile verilen şıklarla doğru olacak şekilde eşleştiriniz.

5. a) Başlangıç ve bitiş noktaları çember üzerinde olan ve çemberin merkezinden geçen doğru parçasıdır.

b) Düzlemde bir çember ile tek bir ortak noktası olan doğrudur.

c) Çemberin üzerindeki iki farklı noktayı birleştiren doğru parçasıdır.

ç) Bir dairede merkez açının iç bölgesi ve gördüğü yayın sınırladığı bölgedir.

1. Kiriş	2. Daire dilimi
3. Çap	4. Teğet

a)	b)	c)	ç)

C. Aşağıdaki açık uçlu soruların cevaplarını ilgili alana yazınız.

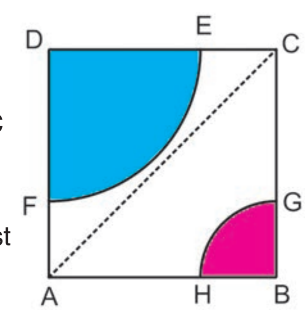
6. Test uçuşları yapılan bir insansız hava aracının düzlemdeki kumanda menzili 10 km dir.

Buna göre insansız hava aracının kaç km^2 alan üzerinde uçuş gerçekleştirebileceğini bulunuz.

7. Bir daire üzerinde bulunan ve birbirine uzaklığı en fazla olan iki nokta arasındaki uzaklık 18 cm dir.

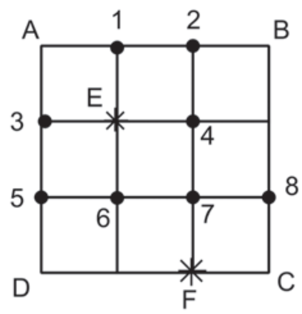
Buna göre bu dairenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

8. Yanda kare şeklinde bir camın B ve D köşesi mavi ve pembe renklerle çeyrek daire biçiminde boyanmıştır. Bu cam [AC] boyunca kesilerek B noktası ile D noktası ve ADC üçgeni ile ABC üçgeninin eş kenarları çakışacak şekilde üst üste konulmuştur.



|DE| = |DF| = 3 cm, |BG| = |BH| = 2 cm ve pembe parça üstte olduğuna göre bu şekle üstten bakıldığında mavi görünen bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9. Bir Genel Ağ sağlayıcı firma noktadan noktaya kablosuz erişim sağlamaktadır. Yanda eş birim karelerden oluşmuş ABCD karesi şeklinde bir bölgede bulunan evler, rakamlar ile gösterilmiştir.



|AB| = 300 m dir. Bir noktadaki verici en fazla 100 m uzaklığa kadar Genel Ağ erişimi sağlayabilmektedir.

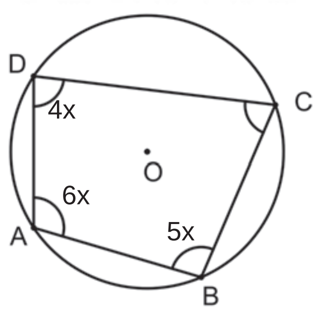
Buna göre E ve F noktasındaki vericilerden kaç farklı eve Genel Ağ erişimi sağlanacağını bulunuz.

10. Ercan, balık tutmak için bir göle olta atmıştır. Misinanın ucundaki çengelin göle değdiği anda oluşturduğu dalganın yarıçapı, saniyede 40 cm artmaktadır.

Buna göre 10 saniye sonra dalganın çapının kaç metre olacağını bulunuz.

D. Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11. Yanda A, B, C ve D noktaları O merkezli çember üzerindedir.



Buna göre $m(\widehat{A}) = 6x$, $m(\widehat{B}) = 5x$ ve $m(\widehat{D}) = 4x$ olmak üzere $m(\widehat{C})$ kaç derecedir?

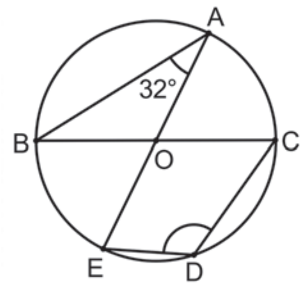
A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

12. Yanda A, B, C, D ve E noktaları O merkezli çember üzerindedir.

$[AE] \cap [BC] = \{O\}$

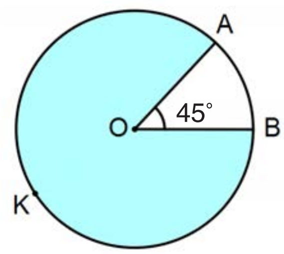
$m(\widehat{BAO}) = 32^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{EDC})$ kaç derecedir?



A) 96 B) 100 C) 122 D) 128 E) 144

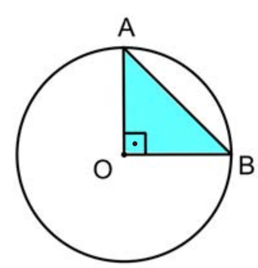
13. Yanda $[AO]$, $[BO]$ ve $\overset{\frown}{AKB}$ ile sınırlı O merkezli daire dilimi verilmiştir.



$m(\widehat{AOB}) = 45^\circ$ ve $|AO| = |BO| = 4$ cm olduğuna göre boyalı alan kaç cm^2 dir?

A) 6π B) 7π C) 12π D) 14π E) 16π

14. Yanda O merkezli daire dilimi ve AOB dik üçgeni verilmiştir.

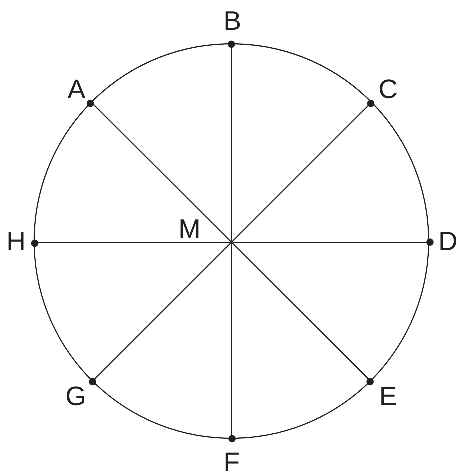


$[OA]$, $[OB]$ ve $\overset{\frown}{AB}$ ile sınırlı daire diliminin alanı 9π cm^2 olduğuna göre AOB dik üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?

A) 12 B) 14 C) 24π D) 16 E) 18

E. 15. ve 16. soruları aşağıda verilen görsele ve metne göre cevaplayınız.

Aşağıda çember şeklinde bir atlıkarınca modeli ve bu model ile ilgili bilgiler verilmiştir.



- Çember şeklindeki bir atlıkarınca üzerinde 8 oyuncak at vardır.
- M noktası, çember şeklindeki atlıkarınca modelinin merkezidir.
- Merkezden oyuncak atlara bağlı demir çubukların uzunluğu 3 metredir.
- Oyuncak atlar, çember üzerindeki A, B, C, D, E, F, G ve H noktalarına eşit aralıklarla yerleştirilmiştir.

15. Art arda olan iki oyuncak at arasındaki yay parçalarının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

16. Art arda olan iki oyuncak at arasındaki yay parçalarının kaç metre uzunluğunda olduğunu bulunuz.

Cevap Anahtarı

1	2	3	4	5	6	7	8
Çember	Daire	Yay	Çevre açı	a) 3 b) 4 c) 1 ç) 2	100π	81π	$\frac{5\pi}{4}$
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
5	8	B	C	D	E	45°	$\frac{3\pi}{4}$

SÖZLÜK

A

açı	: Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşim kümesi.
aksiyom	: Doğruluğu ispatsız kabul edilen önermeler.
alan	: Bir yüzeyin bulunduğu düzlemde kapladığı yer. Bir yüzeyi kaplamak için gerekli birim karelerin sayısı.
alt küme	: Bir kümenin elemanlarından bazılarının oluşturduğu küme.
ardışık	: Birbiri ardından gelen.
aritmetik	: Matematiğin, konusu sayılar, bunların özellikleri ve işlemler olan kolu, hesap.
aritmetik ortalama	: Bir veri grubundaki sayıların toplamının, veri sayısına bölünmesi ile elde edilen değer.

B

basamak	: Bir sayıyı oluşturan rakamlardan her birinin o sayı içerisindeki bulunduğu yer, hane.
bağıntı	: İki veya daha çok nitelik arasında matematik işlemleri yardımı ile kurulan bağlılık veya eşitlik.
benzerlik	: 1. Benzer olma durumu. 2. İki üçgende köşelerinin eşlenmesine göre karşılıklı açıların eş ve karşılıklı kenarların orantısından doğan durum.
birim	: Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.
boş küme	: Elemanı olmayan küme.
bölen	: Bir bölme işleminde bölünen sayının kaç eşit parçaya ayrıldığını gösteren sayı.
bölüm	: Bölme işlemi sonunda elde edilen sayı.
bölünen	: Bölme işleminde eşit parçalara ayrılması gereken sayı, miktar.
bütçe	: Devletin, bir kuruluşun, bir aile veya bir kimsenin gelecekteki belirli bir süre için tasarladığı gelir ve giderlerinin tümü.
bütçe açığı	: Bütçede belirlenen giderlerin gelirlerden çok olması durumu.
bütçe dengesi	: Bütçede gelirin gidere eşit olma durumu.

C

cebir	: Artı ve eksi gerçek sayılarla, bunların yerini tutan harfler yardımıyla nicelikler arasında genel bağlantılar kuran matematik kolu.

Ç

çap	: Çemberin merkezinden geçen ve uç noktaları çember üzerinde bulunan doğru parçası.
çember	: 1. Merkez denilen sabit bir noktadan aynı uzaklık ve düzlemdeki noktalar kümesinin oluşturduğu kapalı eğri. 2. Bu biçime getirilmiş katı cisimlerin çevresi.
çözümleme	: Bir rasyonel sayıyı 10 un kuvvetleri türünden yazma.

D

daire	: Çember ile iç bölgesinin birleşimi.
daire dilimi	: Bir dairede, merkez açının iç bölgesinin gördüğü yayla sınırlı olan kısmı.
dar açı	: Ölçüsü 90 dereceden küçük olan açı.
denklem	: İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik

denklemin kökü : Denklemi sağlayan değer.
değişken : 1. Bir kümenin belirsiz bir ögesini gösteren simge. 2.Yerine, belli bir kümenin her bir elemanı konulabilen simge.
derece : Birim çemberin çevre uzunluğunu 360 eş parçaya ayırarak her bir parçayı gören merkez açının ölçüsü.
dik açı : Ölçüsü 90 derece olan açı.
dik kenar : Bir dik üçgende her bir dar açının karşısında bulunan kenar.
dik üçgen : Bir açısının ölçüsü 90 derece olan üçgen.
doğru orantı : Biri artarken diğeri de aynı oranda artan ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalan çokluklar arasındaki orantı çeşidi.
doğrusal noktalar : Aynı doğru üzerinde bulunan noktalar.

E

eşitlik : İçinde "=" sembolü bulunan matematik cümlesi.

G

gider : Bir iktisadi karar biriminin mal ve hizmet üretmek veya tüketmek için harcadığı paranın tümü.
grafik : Ölçme sonucunda elde edilen verilerin nokta, çizgi, sütun vb. farklı şekillerle ifade edilmesi

H

hacim : Bir cismin uzayda doldurduğu boşluk, oylum, cirim, sıygı.
hipotenüs : Bir dik üçgende en uzun kenar.

İ

ikizkenar : İki kenarı eşit olan.
ispat : Matematiksel kural, sonuç veya tanımları kullanarak bir yargının doğru veya yanlış olduğunun gösterilmesi

K

katsayı : Bir terimde bilinmeyenin ya da bilinmeyenlerin çarpımının önünde bulunan sayı.
kesen : Paralel iki doğrunun her birini farklı bir noktada kesen üçüncü doğru. Bir çemberi iki noktada kesen doğru.
kesir : Bir birimin bölündüğü eşit parçalardan birini veya birkaçını anlatan sayı.
kiriş : Çember üzerindeki iki farklı noktayı birleştiren doğru parçası.
küme : İyi tanımlanmış birbirinden farklı nesnelerden oluşan topluluk.
kümenin elemanları : Bir kümeyi oluşturan nesneler.

M

maliyet : Üretimde bir mal elde edilinceye değin harcanan değerlerin toplamı.
maliyet analizi : Bir malın veya hizmetin maliyetinin belirlenmesini, incelenmesini sağlayan hesaplama işlemi.
merkez açı : Köşesi çemberin merkezinde olan ve ışınları çemberde yay ayıran açı.

Ö

örüntü : Belirli bir kuralı takip eden şekil veya sayı dizileri.

P

paralel : Aynı düzlem içinde ikişer ikişer bulunan ve kesişmeyen, koşut, muvazi.

S

sabit : Değişmeden kalan değer.

sayı doğrusu : Üzerine reel sayıların yerleştirildiği doğru.

sıralı ikili : A kümesinden alınan bir a elemanı ile B kümesinden alınan bir b elemanı kullanılarak oluşturulan (a, b) şeklindeki yeni eleman.

sonlu küme : Eleman sayısı bir doğal sayıya eşit olan küme.

sonsuz küme : Sonlu olmayan küme.

T

tasarruf : Elde edilen gelirin ihtiyaç ve harcamalar için kullanılmayan kısmı.

teğet : Bir eğrinin yanından geçen ve ona ancak bir noktada değen doğru.

terim : Cebirsel bir ifadede + veya – işaretleri arasında bulunan parçalardan her biri.

temettü : Kazanç.

teorem : Kanıtlanabilen bilimsel önerme.

Ü

üs : Bir niceliğin kendisi ile çarpılarak yükseltildiği derecelerden her biri (kuvvet).

Y

yüzde : Herhangi bir sayı ile kullanıldığında yüze bölünen bir şeyin o kadarlık parçasını belirten bir söz.

Z

zam : Fiyat artırma.

KAYNAKÇA

Baki, A. (2002). *Bilgisayar Destekli Matematik.* İstanbul: Ceren Yayıncılık.

Baki, A. (2014). *Matematik Tarihi ve Felsefesi.* Ankara: Pegem Akademi.

Benian, E. (2011, Ocak). Mimar Sinan ve Osmanlı Cami Mimarisinin Gelişimindeki Rolü. *Bilim ve Teknik* (103), 40-47.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2015). *Genel Matematik.* Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. ve Giordano, F. R. (2005). *Thomas Calculus* (11. Baskıdan Çeviri 1. Baskı, Cilt 1). (R. Korkmaz, Çev.) İstanbul: Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2008). Matematik ve Oyun Etkileşimi. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*(3), 75-98.

T.C. Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı.* Ankara

Türk Dil Kurumu. (2012). *Türk Dil Kurumu Türkçe Sözlük.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Türk Dil Kurumu. (2012). *Türk Dil Kurumu Yazım Kılavuzu.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

GENEL AĞ ADRESLERİ

http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3119/el-harezmi
Erişim Tarihi: 28.09.2017
http://www.eba.gov.tr/video/izle/9985e9b4fa7ef69414e95a3096b042f37dd5a6344a001
Erişim Tarihi:28.09.2017
http://www.eba.gov.tr/video/izle/40069182d55fe4c7d4f89a8b3aa1e1f5c6150295c2004
Erişim Tarihi: 15.12.2017
http://www.eba.gov.tr/video/izle/68418fb751347f03b409ba88b0a68d6695f15ad89c006
Erişim Tarihi: 12.01.2018
http://www.eba.gov.tr/video/izle/92419182d55fe4c7d4f89a8b3aa1e1f5c6150295c2005
Erişim Tarihi: 08.11.2017
http://www.darphane.gov.tr/upload/files/Basin_Bulteni/basin_bulteni_2018_Tedavul_Para_seti.pdf
Erişim Tarihi: 11.01.2018
http://megep.meb.gov.tr/mte_program_modul/moduller_pdf/B%C3%BCt%C3%A7e%20Haz%C4%B1rlama.pdf
Erişim Tarihi:18.12.2017
https://sgb.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2016_03/25025608_2016yiligenelkurulsunu_25.03.2016.pdf
Erişim Tarihi: 23.12.2017
http://www.tika.gov.tr/tr: http://www.tika.gov.tr/tr/haber/bosna%27nin_kinali_elleri_uretime_katiliyor-39425
Erişim Tarihi: 15.12.2017
http://israf.org/sayfa/EKMEGINIZI-ISRAF-ETMEYIN/518
Erişim Tarihi: 24.12.2017
http://www.tskdv.org.tr/?islem=paket/sayfaP/sayfa_detay.php&sayfa_id=14
Erişim Tarihi: 18.12.2017
http://www.tuik.gov.tr/PreIstatistikTablo.do?istab_id=1547
Erişim Tarihi: 23.12.2017
http://www.tuik.gov.tr/PreIstatistikTablo.do?istab_id=1548
Erişim Tarihi: 23.12.2017
https://services.tubitak.gov.tr/edergi/user/yaziForm1.pdf?cilt=10&sayi=561&sayfa=10&yaziid=23264
Erişim Tarihi: 05.06.2018

GÖRSEL KAYNAKÇA

Görsel 2.1: https://www.shutterstock.com/tr/download/confirm/146517671?src=onocP-gPaaIpEgdjz6MZgA-1-0&size=medium_jpg
Görsel 2.2: http://miniaturk.com.tr/m%C4%B0n%C4%B0atuerk/maket-eserler/anadolu-eserleri/selimiye-cami.aspx
Görsel 2.3: http://etkinlik.aydin.edu.tr/haber_detay.asp?haberID=3210 (Görsel tasarımcının kendi çizimi)

1. Ünite kapağı: https://www.shutterstock.com/tr/image-illustration/numbers-mathematics-showing-high-tec-computing-201232751
2. Ünite kapağı: https://www.shutterstock.com/tr/image-photo/paris-france-may-6-2016-louvre-469289825
3. Ünite kapağı: https://www.shutterstock.com/tr/image-photo/symbolic-scale-stones-on-sea-background-1125304910
4. Ünite kapaği: https://www.shutterstock.com/tr/image-photo/falkirk-wheel-sunset-rotating-boat-lift-326072105?src=rqE1SRG2eX_yJmUA-B6R8Q-1-0

https://www.dreamstime.com/
https://www.shutterstock.com/home
https://phet.colorado.edu/tr/
https://www.losev.org.tr/v2/tr/default.asp

KAREKOD UZANTILARI

Sayfa 17: http://www.eba.gov.tr/video/izle/9985e9b4fa7ef69414e95a3096b042f37dd5a6344a001
Sayfa 74: http://www.eba.gov.tr/video/izle/92419182d55fe4c7d4f89a8b3aa1e1f5c6150295c2005
Sayfa 98: http://www.eba.gov.tr/video/izle/40069182d55fe4c7d4f89a8b3aa1e1f5c6150295c2004